

## **ДОПОЛНЕНИЯ К СТАТЬЕ:**

### **«Модель замкнутой статической вселенной с неоднородным временем».**

Григорий Пушной.

E-mail: [gpushnoi@yahoo.com](mailto:gpushnoi@yahoo.com)

## **АННОТАЦИЯ.**

В «Дополнениях» приведены математические детали вычислений, использованных в статье. Более детально рассмотрены свойства математической структуры (расслоённое риманово многообразие), лежащей в основе новой интерпретации модели Фридмана. Дано уточнённое выражение для гравитационной потенциальной энергии (и связанного с нею отрицательного давления) замкнутой Вселенной. Выведен теоретический закон Хаббла, который сопоставляется с астрономическими данными для красных смещений суперновых типа Ia и гамма-всплесков. Приводятся аргументы в пользу выбора статической модели. Доказывается устойчивость статической модели в рамках новой интерпретации модели Фридмана.

## **SUPPLEMENTS TO PAPER:**

### **“The Model of Static Universe with Nonhomogeneous Time”**

Grigorii S. Pushnoi

## **ABSTRACT.**

“Supplements” contain details of mathematical computations of the paper. Mathematical structure which lies in the base of new interpretation of Friedmann’s model is considered. New formula for gravitational binding energy (and negative pressure) in the model of closed Universe is derived. Theoretical interrelation “distance-redshift” (Hubble’s law) is confirmed by data for supernova Ia and GBR. Advantages of static model of Universe are considered. Stability of static model in new interpretation is proved.

## ДОПОЛНЕНИЕ-1. Решение уравнений для функции физического времени $T(t; t_0)$ .

Исходим из интервала вида:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \cdot \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2) \right) \quad (1A)$$

Напишем уравнения Эйнштейна для этого интервала, введя параметр Хаббла  $H$ :

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (1)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (2)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3)$$

«Точка» над буквой означает частную производную по времени. Плотность  $\rho$  и давление  $p$  могут содержать в себе вклад от  $\lambda$  – члена, если он отличен от нуля:

$$\rho = \rho_m + \rho_v = \rho_m + \frac{\lambda c^2}{8\pi G} \quad (3.1)$$

$$p = p_m + p_v = p_m - \frac{\lambda c^4}{8\pi G} \quad (3.2)$$

Здесь  $\rho_m$ ,  $p_m$  и  $\rho_v$ ,  $p_v$  – плотность и давление материи и вакуума. Имеем систему из трёх уравнений для четырёх неизвестных функций:  $a(t); H(t); \rho(t); p(t)$ . Чтобы замкнуть систему, необходимо задать дополнительно уравнение состояния материи:

$$p = p(\rho) \quad (4)$$

Взяв производную по времени от левой и правой части в уравнении (1) и подставляя в него  $\dot{H}$  из уравнения (2), после несложных преобразований получаем уравнение непрерывности, которое выражает закон сохранения массы определённого объёма:

$$\dot{\rho} + 3H \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (5)$$

Возможны три случая:

- 1)  $K = 1$  - пространство положительной кривизны,
- 2)  $K = -1$  - пространство отрицательной кривизны,
- 3)  $K = 0$  - плоское пространство.

В нашей модели плотность постоянна:

$$\rho = Const \quad (6)$$

Условие (6) несовместимо с интерпретацией «расширяющегося пространства». Мы предлагаем другую интерпретацию уравнений (1)-(3), согласно которой изменение масштабного фактора  $a(t)$  проявляет себя НЕ как «расширение пространства», а как изменение «скорости течения» физического времени. В этой новой интерпретации мы вводим дополнительный параметр  $t_0$ ,

фиксирующий «текущий момент времени» по оси мирового времени  $t$ . Поскольку интервал вида (1A) записан в «сопутствующей системе координат», относительно которой материя покоится, часы во всех точках пространства могут быть синхронизированы и можно придать объективный смысл понятию «момента времени». На этой предпосылке о возможности синхронизации часов основаны все рассуждения теории «Большого Взрыва», касающиеся свойств Вселенной в разные моменты времени после её возникновения.

Мы предлагаем интерпретацию, в которой пространство НЕ расширяется, но зато истинное (физическое) время течёт неравномерно. Возможность синхронизации часов в сопутствующей системе позволяет придать смысл понятию «текущего момента времени  $t_0$ », который определяет «масштаб времени» в момент  $t_0$  или «скорость течения времени» во Вселенной в момент времени  $t_0$ . «Масштаб времени» описывается с помощью «масштабного фактора», который должен зависеть не только от мирового времени  $t$ , но и от текущего момента  $t_0$ .

Таким образом, в интервале (1A) мы производим следующую замену:

$$a(t) \rightarrow a(t; t_0) \quad (7)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t; t_0)^2 \cdot \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2) \right) \quad (1B)$$

Рассмотрим сначала случай пространства положительной кривизны.

#### ПРОСТРАНСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ.

Сделаем замену переменной в интервале (1B):

$$r = \sin \chi \quad (8)$$

Интервал (1B) приводится к виду:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t; t_0)^2 \cdot \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot (\sin^2 \theta \cdot d\phi^2 + d\theta^2) \right] \quad (9)$$

Элемент пространственного расстояния:

$$dl^2 = a^2(t; t_0) \cdot \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot (\sin^2 \theta \cdot d\phi^2 + d\theta^2) \right] \quad (10)$$

Радиальное расстояние (proper distance):

$$l_r = a(t; t_0) \cdot \chi \quad (11)$$

Вводим «физическое время»  $T(t; t_0)$ , зависящее от «текущего момента»  $t_0$  как от параметра:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a_0}{a(t; t_0)}; \quad a_0 = Const \quad (12)$$

При фиксированном параметре  $t_0$  имеем:

$$dT|_{t_0=Const} = \partial T = \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \quad (13)$$

Умножаем (8) на  $\left( \frac{a_0}{a(t; t_0)} \right)^2$ :

$$dS^2 = c^2 dT^2 - a_0^2 \cdot \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi \cdot (\sin^2 \theta \cdot d\phi^2 + d\theta^2) \right] \quad (14)$$

$$dS = \frac{a_0}{a(t; t_0)} ds \quad (15)$$

Преобразование времени (12)  $t \rightarrow T(t; t_0)$  можно интерпретировать как преобразование «масштаба времени». Это преобразование зависит от значения параметра  $t_0$ , который интерпретируется как «текущий момент» мирового времени  $t$ . При каждом фиксированном значении  $t_0$  мы имеем вполне определённое преобразование масштаба времени. С изменением параметра  $t_0$  меняется и масштабное преобразование  $T(t; t_0)$ . Следовательно, формула (12) описывает непрерывное масштабное преобразование мирового времени.

Данная математическая структура (уравнения (9), (12), (14) и (15)) сложнее, чем простое Риманово пространство. Каждому значению параметра  $t_0$  соответствует своё Риманово пространство с интервалом (14). Пространства отличаются масштабом времени, задаваемым с помощью преобразования времени (12), которое зависит от значения  $t_0$  как от параметра. Масштабный фактор определяет «мгновенную скорость течения времени» в разные моменты  $t_0$ , согласно формуле (12). Символически эту структуру можно представить в виде пятимерного пространства, где пятая координата  $t_0$  задаёт текущий момент времени  $t$ .

Время  $t$  однородно – это значит, что **при фиксированном параметре**  $t_0$  выполняется локальный закон сохранения энергии-импульса в обычной форме уравнений Эйнштейна, записанных относительно временной координаты  $t$ .

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (1A)$$

$$H' + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (2A)$$

$$H = \frac{a'}{a} \quad (3A)$$

Значок «штрих» означает дифференцирование по однородному времени  $t$  при условии  $t_0 = Const$ . Как обычно, здесь  $\rho$  – плотность материи (вместе с вакуумом, если космологическая постоянная  $\lambda \neq 0$ ) и  $p$  – давление материи (вместе с вакуумом, если  $\lambda \neq 0$ ). Эти уравнения выполняются при каждом значении параметра  $t_0$ , то есть на каждом «сечении»  $t_0 = Const$  нашего символического пятимерного пространства. На каждом таком «сечении» интервал имеет вид (14), то есть описывает пространство постоянной положительной кривизны. При этом скорость течения времени в каждом таком «сечении» своя и определяется уравнением (12).

Уравнения Эйнштейна выражают локальный закон сохранения энергии-импульса, который, в свою очередь, означает, что время  $t$  однородно в малой области пространства. С другой стороны, время  $T(t; t_0)$ , входящее в интервал (14), не является однородным временем, так как его масштаб (скорость течения) зависит от параметра  $t_0$ . Чтобы уравнения (1A)-(3A) выполнялись бы в каждом сечении символического пространства при любом значении параметра  $t_0$ , необходимо, чтобы время  $T(t; t_0)$  в каждый момент  $t_0$  было локально однородным, то есть совпадало бы с временем  $t$  в малой окрестности точки  $t = t_0$  с точностью до малых первого порядка.

Математически, **условие локальной однородности физического времени**  $T(t; t_0)$  можно записать следующим образом:

$$\left. \frac{\partial T(t; t_0)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \equiv T'(t_0) = 1 \quad (16)$$

$$T(t = t_0; t_0) \equiv T(t_0) = 1 \quad (17)$$

Из этой записи видно, что символ  $T(t_0)$  означает значение функции  $T(t = t_0; t_0)$ , а символ  $T'(t_0)$  означает значение производной  $\left. \frac{\partial T(t; t_0)}{\partial t} \right|_{t=t_0}$ . «Штрих» в уравнениях (1А) – (3А)

означает частную производную по однородному времени при условии, что параметр  $t_0$  фиксирован.

Учитывая это замечание, преобразование времени (12) можно записать так:

$$T'(t; t_0) = \frac{a_0}{a(t; t_0)} \quad (18)$$

Отсюда находим для функции  $a(t; t_0)$  следующее выражение:

$$a(t; t_0) = \frac{a_0}{T'(t; t_0)} \quad (19)$$

В дальнейшем, чтобы упростить запись формул, будем опускать аргументы функций  $a(t; t_0)$  и  $T(t; t_0)$ , помня при этом, что это функции двух аргументов и что все дифференцирования идут по первому аргументу. Из (19) следует:

$$a = \frac{a_0}{T'} \quad (20)$$

$$a' = -\frac{a_0 T''}{(T')^2} \quad (21)$$

$$H = \frac{a'}{a} = -\frac{T''}{T'} \quad (22)$$

Подставив (22) в уравнение (1А), находим:

$$\left( \frac{T''}{T'} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{Kc^2 (T')^2}{a_0^2} \quad (23)$$

Учитывая (22), находим выражение для левой части уравнения (2А):

$$H' + H^2 = 2 \left( \frac{T''}{T'} \right)^2 - \frac{T'''}{T'} \quad (24)$$

Введём обозначения:

$$A = \frac{8\pi G \rho}{3} \quad (25)$$

$$B = \frac{c^2}{a_0^2} \quad (26)$$

Подставляя (25)-(26) в (23), перепишем это уравнение в виде:

$$\left(\frac{T''}{T'}\right)^2 + KB(T')^2 = A \quad (26)$$

Правую часть уравнения (2A) преобразуем к следующему виду:

$$-\frac{4\pi G}{3} \cdot \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = \frac{8\pi G\rho}{3} - 4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = A - 4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (27)$$

Учитывая (24) и (27), сводим уравнение (2A) к виду:

$$2\left(\frac{T''}{T'}\right)^2 - \frac{T'''}{T'} = A - 4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (28)$$

Из уравнения (26) выразим  $\left(\frac{T''}{T'}\right)^2$  и подставим в (28). Окончательно, приходим к следующему выражению для уравнения (2A):

$$\frac{T'''}{T'} + 2KB \cdot (T')^2 = A + 4\pi G \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (27)$$

Таким образом, мы приходим к следующей системе уравнений для функции  $T(t; t_0)$ :

$$\left(\frac{T''}{T'}\right)^2 + KB(T')^2 = A \quad (1B)$$

$$\frac{T'''}{T'} + 2KB \cdot (T')^2 = A + 4\pi G \cdot \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (2B)$$

$$H = -\frac{T''}{T'} \quad (3B)$$

Так как в нашей модели плотность постоянна, то из уравнения непрерывности (5) получаем следующее уравнение состояния материи:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0 \quad (28)$$

Подставив (28) в (1B)-(2B), окончательно получаем искомую систему уравнений для определения функции преобразования к «физическому времени»  $t \rightarrow T = T(t; t_0)$ .

#### ОСНОВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ:

$$\left(\frac{T''}{T'}\right)^2 + KB(T')^2 = A \quad (1C)$$

$$\frac{T'''}{T'} + 2KB \cdot (T')^2 = A \quad (2C)$$

$$H = -\frac{T''}{T'} \quad (3C)$$

Мы будем решать эту систему при начальных условиях, выражающих локальную однородность физического времени.

## НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ОДНОРОДНОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО ВРЕМЕНИ:

$$\left. \frac{\partial T(t; t_0)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \equiv T'(t_0) = 1 \quad (16)$$

$$T(t = t_0; t_0) \equiv T(t_0) = 1 \quad (17)$$

Прежде чем решать эту систему, отметим два важных обстоятельства.

1) Мы имеем два уравнения для одной лишь функции  $T(t; t_0)$ . Задача эта в общем случае не имела бы решения, если бы уравнение состояния материи было выбрано произвольно. Но в нашей модели мы выбираем уравнение состояния так, чтобы оно было согласовано с уравнением непрерывности при условии постоянной плотности. Уравнение непрерывности при этом является следствием уравнений (1) и (2) и математически оно выражает условие совместности этих уравнений. Поэтому, хотя мы имеем выше систему двух уравнений для одной функции, решение существует именно благодаря нашему выбору уравнения состояния таким образом, чтобы оно удовлетворяло условию совместности уравнений (1) и (2).

2) Уравнения (1С)-(2С) – это система третьего порядка, тогда как мы задаём лишь два начальных условия (16) и (17). Казалось бы, решение должно тогда зависеть от одной произвольной константы, однако это не так. Общее решение системы можно найти, например, исходя из уравнения (2С) и оно действительно содержит три произвольных константы, две из которых можно исключить, благодаря наложению на решение начальных условий. Однако третью константу всё же нельзя задавать произвольно, поскольку найденное решение должно также удовлетворять уравнению (1С), что и приводит к дополнительному условию для нахождения третьей константы. Поэтому решение системы (1С)-(2С) при начальных условиях (16)-(17) определено однозначно.

Переходим к решению основной системы уравнений для случая пространства положительной кривизны.

### РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ.

Сначала найдём выражение для параметра Хаббла. Проще всего это сделать, решая уравнение (2А) с преобразованной правой частью (27) при условии (28):

$$H' + H^2 = A \quad (29)$$

Уравнение легко интегрируется:

$$H = \sqrt{A} \cdot th\left(\sqrt{A}(t - C_1)\right) = \sqrt{A} \cdot \frac{e^{\sqrt{A}(t-C_1)} - e^{-\sqrt{A}(t-C_1)}}{e^{\sqrt{A}(t-C_1)} + e^{-\sqrt{A}(t-C_1)}} = \sqrt{A} \cdot \frac{1 - q^2}{1 + q^2} \quad (30)$$

Для упрощения записи, удобно ввести величину:

$$q = e^{\sqrt{A}(C_1 - t)} \quad (31)$$

Величина  $q$  зависит от первой константы интегрирования  $C_1$ .

Зная параметр Хаббла, находим производную от физического времени, используя уравнение (3С):

$$\frac{u'}{u} \equiv \frac{d}{dt}(\ln(u)) = -H(t) \quad (32)$$

$$u = T' \quad (33)$$

Перейдём в уравнении (32) к производной по  $q$ :

$$q' = -\sqrt{A} \cdot q \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt}(\ln(u)) = \frac{d}{dq}(\ln(u)) \cdot q' = -\sqrt{A} \cdot q \cdot \frac{d}{dq}(\ln(u)) \quad (35)$$

$$-\sqrt{A} \cdot q \cdot \frac{d}{dq}(\ln(u)) = -\sqrt{A} \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} \quad (36)$$

Уравнение (36) легко интегрируется и мы находим:

$$T' \equiv u = C_2 \cdot \frac{q}{1+q^2} \quad (37)$$

В левой части уравнения (37) ещё раз переходим к производной по  $q$ . Получаем уравнение:

$$-\sqrt{A} \cdot q \cdot \frac{dT}{dq} = C_2 \cdot \frac{q}{1+q^2} \quad (38)$$

Интегрируя, окончательно находим общее решение для функции  $T(t; t_0)$ :

$$T(t; t_0) = -\frac{C_2}{\sqrt{A}} \operatorname{Arctg}(q(t; C_1)) + C_3 \quad (39)$$

Отметим, что мы использовали лишь уравнение (2), которое не зависит от параметра  $K$  кривизны пространства.

Потребуем выполнения начальных условий (16)-(17).

Из условия (16), учитывая (37), находим:

$$C_2 = \frac{1+q_0^2}{q_0} \quad (40)$$

$$q_0 = e^{\sqrt{A}(C_1-t_0)} = e^{\sqrt{A} \cdot C_1} \cdot e^{-\sqrt{A} \cdot t_0} \quad (41)$$

Отметим, что из (31) и (41) следует:

$$q = q_0 \cdot e^{\sqrt{A}(t_0-t)} \quad (42)$$

Из условия (17) находим константу  $C_3$ :

$$C_3 = t_0 + \frac{C_2}{\sqrt{A}} \operatorname{Arctg}(q_0) = t_0 + \frac{1+q_0^2}{q_0 \cdot \sqrt{A}} \operatorname{Arctg}(q_0) \quad (43)$$

Окончательно, получаем следующее выражение для функции  $T(t; t_0)$ :

$$T(t; t_0) = t_0 + \frac{1+q_0^2}{q_0 \cdot \sqrt{A}} (\operatorname{Arctg}(q_0) - \operatorname{Arctg}(q)) \quad (44)$$

Отметим, что, учитывая (42) и свойство нечётности арктангенса, функция  $T(t; t_0)$  является чётной по аргументу  $q_0$ :  $T(-q_0) = T(q_0)$ .

$$T'(t; t_0) = \frac{1+q_0^2}{q_0} \cdot \frac{q}{1+q^2} = \frac{(1+q_0^2) e^{\sqrt{A}(t_0-t)}}{1+q_0^2 \cdot e^{2\sqrt{A}(t_0-t)}} \quad (45)$$

Опять видим, что и функция  $T'(t; t_0)$  не меняется при замене:  $q_0 \rightarrow -q_0$ .

Как и следовало ожидать, мы получили решение, зависящее от неопределённой константы  $C_1$ , входящей в  $q_0$ , согласно формуле (41).

Рассмотрим теперь уравнение (1С). Имеем:

$$\left(\frac{T''}{T'}\right)^2 = H^2 = A \cdot \left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^2 \quad (46)$$

$$(T')^2 = \left(\frac{1+q_0^2}{q_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{q}{1+q^2}\right)^2 \quad (47)$$

Подставляя в (1С), находим, что это уравнение превращается в тождество, если выполняется следующее соотношение между численными константами:

$$KB \cdot \left(\frac{1+q_0^2}{q_0}\right)^2 = 4A \quad (48)$$

Для пространства положительной кривизны  $K = 1$ . Отсюда находим:

$$\frac{1+q_0^2}{q_0} = \pm 2x; \quad (49)$$

$$x \equiv \sqrt{\frac{A}{B}} - \text{вещественное положительное число.} \quad (50)$$

Разрешая уравнение (49) относительно  $q_0$ , находим 4 возможных корня:

$$q_0 = \pm x \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{знаки не согласованы}) \quad (51)$$

В формуле (41) множитель  $e^{-\sqrt{A} \cdot t_0}$  - вещественное положительное число.

Для отрицательных корней (50) должно выполняться соотношение:

$$-\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \cdot e^{\sqrt{A} \cdot t_0} = e^{\sqrt{A} \cdot C_1} \quad (52)$$

Отсюда находим:

$$C_1 = \frac{\text{Ln}\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)}{\sqrt{A}} + t_0 + i \cdot \frac{\pi \cdot (2n+1)}{\sqrt{A}}, \quad n \in Z \quad (53)$$

$$q_0 = -\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (54)$$

Для положительных корней (51) находим:

$$\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \cdot e^{\sqrt{A} \cdot t_0} = e^{\sqrt{A} \cdot C_1} \quad (55)$$

$$C_1 = \frac{\text{Ln}\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)}{\sqrt{A}} + t_0 \quad (56)$$

$$q_0 = \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (57)$$

Учтём теперь, что параметр Хаббла в момент  $t_0$  положителен. Согласно формуле (30), получаем следующее условие:

$$\frac{1-q_0^2}{1+q_0^2} > 0 \quad (58)$$

Пусть  $x > 1$ . Тогда все корни (51) вещественные числа, а неравенство (58) выполняется лишь при двух возможных корнях:

$$\text{Первый корень: } q_{01} = x - \sqrt{x^2 - 1} < 1 \quad (59)$$

$$\text{Второй корень: } q_{02} = -\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -q_{01} \quad (60)$$

Если  $x < 1$ , то корни  $q_0$  - комплексные числа. В этом случае, согласно (45), функция  $T'(t; t_0)$  будет принимать комплексные значения при  $t \neq t_0$ , что противоречит условию вещественности искомого решения.

Так как функция  $T(t; t_0)$  не меняется при изменении знака  $q_0$ , то корни (59)-(60) дают одно и то же решение.

Приведём полный список формул решения для пространства положительной кривизны. Решение удобно записывать в параметрическом виде – через параметры  $q(t; t_0)$  и  $q_0(t_0)$ . В силу чётности функций  $T(q; q_0)$  и  $T'(q; q_0)$ , достаточно рассмотреть случай с  $q_0 > 0$ .

**РЕШЕНИЕ ДЛЯ  $K = 1$ .**

$$T(q; q_0; t_0) = t_0 + \frac{2}{\sqrt{B}} (\text{Arctg}(q_0) - \text{Arctg}(q)) \quad (61)$$

$$q_0 = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad (62)$$

$$x \equiv \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (63)$$

$$A = \frac{8\pi G \rho}{3} \quad (64)$$

$$B = \frac{c^2}{a_0^2} \quad (65)$$

$$q = q_0 \cdot e^{\sqrt{A} \cdot (t_0 - t)} \quad (66)$$

$$T'(q; q_0) = \frac{2xq}{1+q^2} \quad (67)$$

$$T''(q; q_0; t_0) = -\sqrt{A} \cdot \frac{2xq(1-q^2)}{(1+q^2)^2} \quad (68)$$

$$H = -\frac{T''}{T'} = \sqrt{A} \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} < \sqrt{A} \quad (69)$$

Критическая плотность равна:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (70)$$

Тогда формулу (69) можно переписать так:

$$\frac{\rho_c}{\rho} = \left( \frac{1-q^2}{1+q^2} \right)^2 < 1 \quad (71)$$

Таким образом, в модели положительной кривизны средняя плотность выше критической. Составим производную по времени от параметра Хаббла:

$$H' = A \cdot \frac{4q^2}{(1+q^2)^2} > 0 \quad (72)$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{a''}{a} = H^2 + H' > 0 \quad (73)$$

То есть, в рамках старой интерпретации «расширение пространства» происходит с ускорением<sup>1</sup>.

Динамика масштабного фактора описывается соотношением:

$$a \equiv \frac{a_0}{T'} = \left( \frac{a_0}{2x} \right) \cdot \frac{1+q^2}{q} = \frac{c}{\sqrt{A}} \cdot \frac{1+q^2}{2q} \quad (74)$$

Масштабный фактор принимает наименьшее значение при  $q_1 = 1$ :

$$a_{\min} = a(q_1) = \frac{a_0}{x} > 0 \quad (75)$$

Мы видим, что масштабный фактор нигде не обращается в ноль, то есть отсутствует так называемая «первичной сингулярность», которая есть в интерпретации «Большого Взрыва».

Рассмотрим теперь решение для пространства отрицательной кривизны  $K = -1$ . Все выкладки аналогичны<sup>2</sup>. Решение можно записать сразу, заметив, что для этого надо в решении для пространства положительной кривизны произвести следующие замены:

$$q^2 \rightarrow -q^2; \quad \text{Arctg} \rightarrow \text{Arcth} \quad (76)$$

В результате получаем следующее решение.

**РЕШЕНИЕ ДЛЯ  $K = -1$ .**

$$T(q; q_0; t_0) = t_0 + \frac{2}{\sqrt{B}} (\text{Arcth}(q_0) - \text{Arcth}(q)) \quad (77)$$

$$q_0 = \sqrt{x^2 + 1} - x < 1 \quad (78)$$

$$q = q_0 \cdot e^{\sqrt{A} \cdot (t_0 - t)} \quad (79)$$

$$T'(q; q_0) = \frac{2xq}{1-q^2} \quad (80)$$

$$T''(q; q_0; t_0) = -\sqrt{A} \cdot \frac{2xq(1+q^2)}{(1-q^2)^2} \quad (81)$$

$$H = -\frac{T''}{T'} = \sqrt{A} \cdot \frac{1+q^2}{1-q^2} > \sqrt{A} \quad (82)$$

$$\frac{\rho_c}{\rho} = \left( \frac{1+q^2}{1-q^2} \right)^2 > 1 \quad (83)$$

$$H' = -A \cdot \frac{4q^2}{(1-q^2)^2} < 0 \quad (84)$$

$$a \equiv \frac{a_0}{T'} = \left( \frac{a_0}{2x} \right) \cdot \frac{1-q^2}{q} \quad (85)$$

Мы видим, что масштабный фактор обращается в ноль при  $q = 1$ , что означает существование сингулярности в случае пространства отрицательной кривизны.

<sup>1</sup> Причина этого – выбор уравнения состояния (28), при котором давление отрицательно. Отрицательное давление феноменологически описывает силы гравитационного притяжения. Подробнее этот пункт будет рассмотрен в Дополнении II.

<sup>2</sup> В этом случае удобно сразу интегрировать уравнение (1B).

Отметим, что точка сингулярности  $q=1$  удалена от точки текущего момента  $t_0$  на бесконечно большой интервал физического времени  $T$ . Это прямо следует из формулы (77), так как при  $q \rightarrow 1$  имеем  $Arcth(q) \rightarrow \pm\infty$ . При этом соответствующий сингулярности момент однородного времени стремится к вполне определённом конечному значению  $t_1$ :

$$t_1 = t_0 - \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot Ln\left(\frac{1}{q_0}\right) = t_0 + \frac{Ln(q_0)}{\sqrt{A}} < t_0 \quad (86)$$

Отметим ещё, что в силу чётности функции  $Arcth(q)$ , при  $q \rightarrow 1$  возможно также, что будет иметь место  $Arcth(q) \rightarrow -\infty$ , и тогда точка сингулярности по оси физического времени окажется сдвинута в бесконечно-удалённое будущее. В обоих случаях точка сингулярности недостижима по оси физического времени, она бесконечно удалена по этой оси в прошлом и будущем.

«Расширение пространства» отрицательной кривизны, как и в случае пространства положительной кривизны, происходит с ускорением, согласно формуле (73).

#### **Отметим характерные свойства найденных решений.**

В случае  $K=1$  точка  $q=1$  соответствует положительному значению масштабного фактора  $a_{\min} > 0$ . В этой «особой точке» параметр Хаббла обращается в ноль. Сингулярность отсутствует, а решение имеет физический смысл и при  $q > 1$ . В этой области параметр Хаббла становится отрицательным, а масштабный фактор уменьшается со временем – имеет место «сжатие пространства», если использовать традиционную интерпретацию. Мы имеем «особую точку» не в смысле сингулярности, а в смысле изменения динамики параметров модели. Момент  $t_1$  отстоит от текущего момента  $t_0$  на конечный отрезок однородного времени, согласно формуле (86). Этот же интервал по шкале физического времени будет также конечной величиной и равен:

$$t_0 - T(1; q_0; t_0) = \frac{1}{\sqrt{B}} \left( \frac{\pi}{2} - 2Arctg(q_0) \right) \quad (87)$$

Правая часть в формуле (87) не зависит от  $t_0$ , а значит «особая точка» всегда удалена в прошлое на один и тот же вполне определённый интервал физического времени в любой момент текущего времени  $t_0$ . Это – одно из свойств физического времени, в котором «особая точка» всегда находится в прошлом на одном и том же временном удалении от любого текущего момента времени. Изменение масштаба, вызванное увеличением  $t_0$  компенсирует рост временного промежутка между  $t_0$  и особой точкой – это приводит к тому, что этот промежуток времени в новом временном масштабе оказывается одинаков при всех  $t_0$ .

Формула (87) определяет доступное наблюдению «прошлое» с «правильным»<sup>3</sup> поведением масштабного фактора и параметра Хаббла (масштабный фактор растёт, а параметр Хаббла положительный). Переходя от временного сдвига между моментом наблюдаемого события и моментом наблюдения, к расстоянию, которое за это время преодолевает световой сигнал, приходим к ограничению для наблюдаемого размера «правильной» Вселенной.

<sup>3</sup> Вселенную, в которой динамика масштабного фактора и параметра Хаббла соответствует наблюдаемым трендам – параметр Хаббла больше нуля, а масштабный фактор растёт – такую Вселенную будем называть «правильной Вселенной».

$$L < L_{\max} = c(t_0 - T(1; q_0; t_0)) = a_0 \left( \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arctg}(q_0) \right) \quad (88)$$

Если включить в рассмотрение также «неправильную Вселенную», в которой масштабный фактор уменьшается, а параметр Хаббла отрицательный, то есть положить  $t \rightarrow -\infty$  и  $q \rightarrow +\infty$ , то из формулы (61) для этого предельного случая следует:

$$t_0 - T(+\infty; q_0; t_0) = \frac{1}{\sqrt{B}} (\pi - 2 \operatorname{Arctg}(q_0)) \quad (89)$$

Отсюда следует ограничение на размер всей наблюдаемой Вселенной («правильной и неправильной»):

$$L < L_{\max} = c(t_0 - T(+\infty; q_0; t_0)) = a_0 (\pi - 2 \operatorname{Arctg}(q_0)) \quad (90)$$

В замкнутой Вселенной теоретически можно предположить существование «фантомов» - мнимых источников – двойников настоящих объектов. Такие «фантомы» образуются за счёт того, что свет от настоящих объектов может приходиться в точку наблюдения двумя путями – «напрямую» и «оглябая замкнутое пространство» подобно тому, как две точки на сфере можно соединить двумя дугами одной окружности с радиусом, равным радиусу сферы, проведённых через эти точки. Согласно (14) «радиальное расстояние» от точки наблюдения до источника равно  $a_0 \chi$ , где  $0 \leq \chi \leq \pi$ . Для сферы точка «фантома» объекта расположена на пересечении со сферой диаметра, проходящего через объект. В случае трёхмерного замкнутого пространства точка, соответствующая значению  $\chi = \pi$ , является точкой расположения «фантома» самого наблюдателя. Если расстояние до истинного объекта равно  $l_0$ , то расстояние до фантома равно  $l_1 = \pi a_0 - l_0$ . Чтобы «видеть фантом», наблюдатель должен иметь возможность регистрировать лучи, источник которых расположен на расстоянии большем, чем  $\pi a_0$ . Луч, визуализирующий «фантом», находящийся на расстоянии  $l_1$  от наблюдателя, движется по большой дуге от истинного источника, расположенного на расстоянии  $L_{\text{фантом}} = \pi a_0 + l_1 \geq \pi a_0$ <sup>4</sup>. Но максимально наблюдаемый размер Вселенной всегда меньше  $\pi a_0$ , как это следует из формулы (90). Таким образом, невозможно наблюдение световых сигналов, визуализирующих «фантомы» объектов. Мы приходим к выводу о ненаблюдаемости «фантомов».

**Таким образом, для пространства с положительной кривизной получаем важный результат, связанный с введением неоднородного времени: введение неоднородного времени делает ненаблюдаемыми «фантомы» объектов.**

Это физически значимое свойство новой интерпретации модели можно рассматривать как теоретический аргумент в пользу принятия данной интерпретации. Он указывает на ту функцию, которую выполняет «неоднородное время» - оно делает ненаблюдаемыми фантомные объекты, исключая их влияние на развитие Мира.

Приведём, наконец, решение для случая плоского пространства  $K = 0$ . В этом случае уравнения Фрийдмана-Леметра легко интегрируются и приводят к следующему решению:

<sup>4</sup> Это не противоречит тому, что максимальное расстояние в замкнутой Вселенной не превышает  $\pi a_0$ , так как под «расстоянием» в этом случае понимают длину меньшей дуги, которая всегда меньше чем  $\pi a_0$ . Свет, визуализирующий «фантом», достигает наблюдателя по «большей дуге».

**РЕШЕНИЕ ДЛЯ  $K = 0$ .**

$$T = t_0 + \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \left(1 - e^{\sqrt{A}(t-t_0)}\right) \quad (91)$$

$$T' = e^{\sqrt{A}(t_0-t)} \quad (92)$$

$$T'' = -\sqrt{A} \cdot T' = -\sqrt{A} \cdot e^{\sqrt{A}(t_0-t)} \quad (93)$$

$$H = -\frac{T''}{T'} = \sqrt{A} \quad (94)$$

$$H' = 0 \quad (95)$$

$$a = a_0 \cdot e^{\sqrt{A}(t-t_0)} \quad (96)$$

$$\frac{\rho_c}{\rho} = 1 \quad (97)$$

Мы рассмотрели решения уравнений Фридмана-Леметра для Вселенной с постоянной плотностью в моделях пространства с положительной, отрицательной и нулевой пространственной кривизной. Во всех трёх случаях не возникает физической сингулярности решения. Формально, найденные решения можно рассматривать, не привлекая идею о неоднородном времени, так как они вытекают из уравнений Фридмана-Леметра при условии постоянства плотности  $\rho = Const$ . Это приводит к уравнению состояния  $\rho + \frac{p}{c^2} = 0$ . В обычной интерпретации «расширения пространства» данное уравнение состояния часто вводят как уравнение состояния так называемой «тёмной энергии». Хотя отрицательное давление, следующее из этого уравнения состояния, можно объяснить как феноменологическое описание гравитационного притяжения тел, более детальный анализ (см. **Дополнение-V**) показывает, что согласовать теоретический закон Хаббла нашей модели с данными по красному смещению галактик и гамма-всплесков можно, лишь предположив наличие «тёмной энергии».

Модель  $\rho = Const$  без введения неоднородного времени (в стандартной интерпретации) допускает наблюдаемость «фантомных объектов», что ведёт к дополнительным трудностям такой теории.

Отметим ещё одно важное обстоятельство, связанное с выбором уравнения состояния:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = 0 \quad (98)$$

Обозначим плотность, удовлетворяющую этому уравнению, как  $\rho_0$ . Тогда уравнение непрерывности (5) можно переписать в виде:

$$\rho' = -3H(\rho - \rho_0) \quad (99)$$

Если  $H > 0$  (в области «правильной Вселенной») состояние  $\rho = \rho_0$  описывает устойчивое равновесие распределения материи – при малых отклонениях плотности выше или ниже  $\rho_0$  плотность начинает меняться, восстанавливая нарушенное равенство. Условие  $\rho' = 0$  есть условие устойчивого состояния материи. Поэтому взятое за основу условие  $\rho = Const$  просто выражает тот факт, что мы рассматриваем устойчивое состояние «правильной Вселенной». Плотность  $\rho_0$  определяется константами  $a_0$  (радиус пространственной кривизны) и  $w$  (параметр

состояния материи в уравнении для гидростатического давления  $p_{\text{гидр.}} = \rho c^2 \cdot w$  согласно формулам (40) и (46) статьи:<sup>5</sup>

$$p = \rho_0 c^2 \cdot w - \frac{4\pi}{3} \cdot G \rho_0^2 a_0^2 \cdot \gamma = -\rho_0 c^2 \quad (100)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{Si(2\pi)}{4\pi} + \frac{Si(4\pi)}{8\pi} = 0.446518 \quad (101)$$

Отсюда находим выражение для  $\rho_0$  как функции от параметра  $a_0$ :

$$\rho_0 = \frac{C_0}{a_0^2} \quad C_0 = \frac{3c^2(1+w)}{4\pi G \gamma} \quad (102)$$

Плотность  $\rho$  зависит от объёма пространства положительной кривизны и массы вселенной, согласно формуле:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{C_1}{a_0^3} \quad C_1 = \frac{M}{2\pi^2} \quad (103)$$

Подставляя в (99), получаем:

$$\rho' = -3H \left( \frac{C_1}{a_0^3} - \frac{C_0}{a_0^2} \right) = -\frac{3HC_1}{a_0^3} \left( 1 - \frac{C_0}{C_1} a_0 \right) \quad (110)$$

Значение  $a_0$ , при котором  $\rho = \rho_0$ , обозначим как  $a_0^*$ . Из (110) следует:

$$a_0^* = \frac{C_1}{C_0} \quad (111)$$

Подставляя (111) в (110), получаем:

$$\rho' = -\frac{3HC_1}{a_0^3} \left( 1 - \frac{a_0}{a_0^*} \right) \quad (112)$$

Учитывая (103), преобразуем левую часть формулы (112) и получим логистическое уравнение для радиуса пространственной кривизны:

$$a_0' = \frac{a_0 (a_0^* - a_0)}{a_0^*} \quad (113)$$

Из этого уравнения следует устойчивость состояния  $a_0 = a_0^*$ . Действительно, если  $a_0 > a_0^*$  то радиус кривизны уменьшается  $a_0' < 0$ , если же  $a_0 < a_0^*$ , то радиус кривизны растёт  $a_0' > 0$ .

Этот результат находится в противоречии с укоренившимся убеждением, что статическое решение уравнений Эйнштейна неустойчиво. Этому мнения придерживался и сам Эйнштейн, считая данный факт одним из главных аргументов для выбора нестатической модели Вселенной.

<sup>5</sup> В **Дополнении-IV** мы рассмотрим уточнённый расчёт отрицательного давления, обеспечивающий согласование теоретического закона Хаббла с астрономическими данными по красным смещениям для сверхновых и гамма-всплесков.

## ДОПОЛНЕНИЕ-II. Позиция Эйнштейна.

Известно, что Эйнштейн изначально был сторонником именно статической модели Мира и предложил два варианта такой модели, отличающиеся способом введения отрицательного давления. Без введения отрицательного давления исходные уравнения Эйнштейна для статического Мира были несовместны. В 1917 году в работе «*Вопросы космологии и общая теория относительности*» Эйнштейн дополняет свои исходные уравнения  $\lambda$  – членом, играющим роль отрицательного давления, и этим обеспечивает совместность уравнений статической модели. В принстонских лекциях 1921 года, опубликованных под названием «*Сущность теории относительности*», Эйнштейн формулирует статическую модель, не используя  $\lambda$  – член, но вводя отрицательное давление с непонятным физическим смыслом. Оба способа обеспечить совместность уравнений поля в статической модели, таким образом, сводятся к введению отрицательного давления: либо посредством расширения самих уравнений через введение  $\lambda$  – члена, либо посредством прямого введения отрицательного давления, без конкретизации его физического смысла. Приведём соответствующие выдержки.

### А. Эйнштейн (1917), «Вопросы космологии и общая теория относительности»:

*«Согласно общей теории относительности, метрический характер (кривизна) четырёхмерного пространственно-временного континуума определяется в каждой точке находящейся в ней материей и состоянием последней. Поэтому вследствие неравномерности распределения материи метрическая структура этого континуума должна быть крайне запутанной. Но если говорить о структуре пространства в целом, то мы можем представить материю как бы равномерно распределённой по очень большой области пространства, так что её плотность распределения становится чрезвычайно медленно меняющейся функцией. В данном случае мы поступаем так же, как геодезисты, которые крайне сложную в деталях поверхность Земли заменяют приближённо эллипсоидом.*

*Самое важное из всего, что нам известно из опыта о распределении материи, заключается в том, что относительные скорости звёзд очень малы по сравнению со скоростью света. Поэтому я полагаю, что на первых порах в основу наших рассуждений можно положить следующее приближённое допущение: имеется координатная система, относительно которой материю можно рассматривать находящейся в течение продолжительного времени в покое».*

Далее, Эйнштейн рассматривает пространство постоянной положительной кривизны и доказывает, что уравнения поля несовместимы с такой моделью Мира.

*«Система уравнений (13) [уравнений Эйнштейна без  $\lambda$  – члена – Г.] никогда не будет удовлетворена... Таким образом,... теория относительности несовместима с гипотезой пространственной замкнутости мира.*

*Однако система уравнений (13) допускает одно весьма простое обобщение... к левой части уравнений мы можем прибавить фундаментальный тензор  $g_{\mu\nu}$ , умноженный на неизвестную пока универсальную константу –  $\lambda$ ...*

*Это [с  $\lambda$  – членом – Г.] уравнение поля при достаточно малом значении  $\lambda$  во всяком случае тоже совместно с результатами наблюдений над Солнечной системой. Оно удовлетворяет также законам сохранения импульса и энергии... [Это] Уравнение поля совместимо с нашими предположениями относительно поля и материи»*

Эйнштейн приводит решение уравнений с  $\lambda$  — членом для статической модели и дальше пишет следующее:

*«Теоретическое представление о реальном мире, согласно нашим рассуждениям, было бы следующим. Характер кривизны пространства в соответствии с распределением материи зависит от места и времени; однако это пространство в целом можно приближённо представить в виде сферического пространства. Во всяком случае, это представление логически непротиворечиво и с точки зрения общей теории относительности является наиболее естественным.... Для того, чтобы прийти к этому непротиворечивому представлению, мы должны были... ввести новое обобщение уравнений гравитационного поля, неоправдываемое нашими действительными знаниями о тяготении. Необходимо, однако, отметить, что положительная кривизна пространства, обусловленная находящейся в нём материей, получается и в том случае, когда указанный дополнительный член не вводится; последний нам необходим для того, чтобы обеспечить возможность квазистатического распределения материи, соответствующего фактическим малым скоростям звёзд»*

Последнее замечание касается рассуждений Эйнштейна о граничных условиях и принципе относительности инерции тел, которые он приводит в первой части этой статьи. Эйнштейн анализирует проблему задания граничных условий на пространственной бесконечности и не находит для неё иного решения кроме как предположить, что Мир имеет структуру замкнутого пространства с положительной пространственной кривизной.

*«...Мне не удалось установить граничные условия для пространственной бесконечности. Тем не менее существует ещё одна возможность... Именно, если бы можно было рассматривать мир в его пространственной протяжённости как замкнутый континуум, то вообще отпала бы необходимость в подобного рода граничных условиях».*

Таким образом, выбор статической модели Эйнштейном опирался, во-первых, на принципы естественности и простоты такой модели, во-вторых, на данные астрономии, указывавшие на малость относительных скоростей звёзд относительно друг друга, в-третьих, на возможность простого и естественного решения проблемы граничных условий в этом случае и, в-четвёртых, на соответствие такой модели с принципом относительности инерции.

#### **Из принстонских лекций 1921 года А. Эйнштейна «Сущность теории относительности».**

В этих лекциях Эйнштейн приводит статическое решение, используя уравнения без  $\lambda$  — члена. При этом для обеспечения совместности уравнений ему приходится вводить отрицательное давление. Прежде всего, Эйнштейн указывает на то, что принцип относительности инерции Маха несовместим с гипотезой евклидовости пространства:

*«Если бы Вселенная была квазиэвклидова, то это означало бы, что Мах был совершенно неправ, полагая, что инерция так же, как и тяготение, зависит от характера взаимодействия между телами. Действительно, в этом случае при удачном выборе системы координат  $g_{\mu\nu}$  были бы постоянными на бесконечности, как это принимается в специальной теории относительности, а в конечных областях при подходящем выборе системы координат лишь немного отклонялись бы от этих постоянных значений, вследствие влияния масс в этих областях. Физические свойства пространства тогда были бы в общих чертах не связаны с материей, хотя и не были бы полностью независимыми от неё, но были бы обусловлены ею в весьма слабой степени. Такая дуалистическая концепция неудовлетворительна уже сама по себе; кроме того, против неё можно выдвинуть веские физические соображения, которые мы и рассмотрим ниже.*

Гипотеза, согласно которой Вселенная бесконечна и евклидова на бесконечности, является, с точки зрения теории относительности, довольно сложной гипотезой. На языке общей теории относительности такая гипотеза требует, чтобы тензор Римана четвёртого ранга  $R_{iklm}$  обращался бы в нуль на бесконечности, что даёт 20 независимых условий, тогда как только 10 компонент тензора кривизны  $R_{\mu\nu}$  входят в уравнения гравитационного поля. Нельзя удовлетвориться постулированием столь далеко идущего ограничения, не имея для этого каких-либо физических оснований.

Между тем теория относительности даёт основания полагать, что Мах был на правильном пути, когда он высказал мысль о зависимости инерции от характера взаимодействия между телами... Согласно нашим уравнениям, инертные массы действуют друг на друга в смысле относительности инерции, хотя и очень слабо...

Из уравнений движения... следует, что:

- 1) Инертная масса... возрастает по мере приближения весомых масс к ... «пробному телу»
- 2) Ускоряющиеся массы оказывают индукционное действие на пробное тело в направлении ускорения...
- 3) Материальная точка, движущаяся внутри полого вращающегося тела перпендикулярно оси вращения, отклоняется в направлении вращения (силы Кориолиса)... Ценробежный эффект внутри вращающегося полого тела также следует из теории, как это было показано Тиррингом.

Хотя вследствие малости... эти эффекты нельзя наблюдать на опыте, они, несомненно, существуют. Это следует из общей теории относительности. Существование этих эффектов является сильным аргументом в пользу идей Маха об относительности всех инерциальных воздействий. Последовательно проводя эту точку зрения до конца, мы должны ожидать, что вся инерция, то есть всё поле  $g_{\mu\nu}$ , определяется в первую очередь распределением материи во Вселенной, а не граничными условиями на бесконечности».

Таким образом, отказ от бесконечного евклидова пространства как адекватной теоретической конструкции реального Мира, Эйнштейн аргументирует, ссылаясь на необходимость выполнения принципа относительности инерции Маха – зависимость инертных свойств тел от состояния движения материи во всём пространстве. Эйнштейн указывает, что такая зависимость вытекает из уравнений ОТО, но эффекты малы.

«Для построения удовлетворительной концепции поля  $g_{\mu\nu}$  космических размеров, по-видимому, важен тот факт, что относительные скорости звёзд малы по сравнению со скоростью света... Если мы, желая изучить геометрические свойства Вселенной как целого, захотим пренебречь... местными неоднородностями плотности вещества и поля  $g_{\mu\nu}$ , то естественно заменить фактическое распределение масс непрерывным распределением и, кроме того, приписать этому распределению постоянную плотность  $\sigma$ . В такой воображаемой Вселенной все пространственные точки и направления в пространстве будут геометрически эквивалентны; в своих пространственных измерениях она будет обладать постоянной кривизной и будет цилиндрической по отношению к  $x_4$ -координате. Особенно привлекательным в этой схеме является то, что Вселенная оказывается пространственно ограниченной и, согласно нашему предположению о постоянстве плотности  $\sigma$ , обладает постоянной кривизной, будучи сферической или эллиптической. В этом случае граничные

*условия на бесконечности, столь неудобные с точки зрения общей теории относительности, заменяются гораздо более естественными условиями для замкнутой поверхности»*

Итак, Эйнштейн опять подчёркивает, что более естественным с точки зрения задания граничных условий и наблюдений над звёздами является выбор пространственно ограниченной модели с покоящейся материей. Дальше Эйнштейн пишет и решает уравнения без  $\lambda$  – члена. В качестве материи он берёт пылевидную среду, находящуюся в состоянии покоя, но при этом добавляет отрицательное давление в тензор энергии импульса, чтобы обеспечить совместность получаемых уравнений.

*«... Рассмотрим тензор энергии вещества, распределённого наподобие облака пыли..., считая при этом, что всё находится в состоянии покоя. Но дополнительно мы добавим... член, описывающий давление. Необходимость его можно физически обосновать следующим образом. Вещество состоит из электрически заряженных частиц. В рамках теории Максвелла они не могут быть описаны как свободные от особенностей электромагнитные поля. Чтобы не противоречить фактам, в выражение для энергии необходимо ввести дополнительные члены, не содержащиеся в теории Максвелла, которые обеспечили бы устойчивость электрически заряженных частиц, несмотря на взаимное отталкивание составляющих их заряженных частей. Именно в связи с этим Пуанкаре предположил, что внутри этих частиц существует давление, которое и компенсирует электростатическое отталкивание. Нельзя однако, определённо утверждать, что это давление обращается в нуль вне частиц. Мы придём к согласию с этими представлениями, если в нашем феноменологическом рассмотрении добавим член, описывающий давление. Это давление, однако, не следует смешивать с гидродинамическим, поскольку оно служит лишь энергетическим выражением динамических связей внутри вещества»*

Благодаря введению этого давления, уравнения поля становятся совместными и приводят к отрицательному значению для этого давления.

**Статическое решение Эйнштейна уравнений с  $\lambda$  – членом:**

$$a = \sqrt{\frac{2}{\chi\sigma}}; \quad \lambda = \frac{\chi\sigma}{2}; \quad \sigma = \rho c^2. \quad (114)$$

**Статическое решение Эйнштейна с отрицательным давлением материи:**

$$a = \sqrt{\frac{2}{\chi\sigma}}; \quad p = -\frac{\sigma}{2}.$$

Сравнение решений, найденных для уравнений с  $\lambda$  – членом и уравнений с отрицательным давлением, показывает, что оба решения эквивалентны, если положить:

$$p = -\frac{\lambda}{\chi} \quad (115)$$

где  $\chi$  - константа, входящая в уравнения Эйнштейна и  $a$  - радиус пространственной кривизны.

*«Если Вселенная квазиэвклидова, и, следовательно, её радиус кривизны бесконечен, то  $\sigma$  должна быть равна нулю. Однако маловероятно, чтобы средняя плотность вещества во Вселенной была бы действительно равна нулю. Это является нашим третьим аргументом против предположения, что Вселенная квазиэвклидова. Вряд ли можно ожидать, что обращается в нуль наше гипотетическое давление, хотя физическая природа этого давления*

сможет быть выяснена только после того, как мы глубже поймём законы электромагнитного поля».

Подчеркнём ещё раз, что уравнения статической модели совместны лишь при условии введения отрицательного давления – либо прямым образом, либо через введение в уравнения  $\lambda$  – члена. Аргументы Эйнштейна в пользу принятия пространственно ограниченной Вселенной базируются на эстетической простоте и естественности такой модели, на возможности разрешить в её рамках проблему граничных условий и удовлетворить принципу относительности инерции Маха. В качестве аргумента в пользу выбора СТАТИЧЕСКОЙ модели Эйнштейн ссылается на данные астрономии, свидетельствующие о малости относительных скоростей звёзд. В то время (1921 год) исследования Хаббла ещё не были проведены.

В 1922 году появилась статья Фридмана «О кривизне пространства», в которой автор предлагал нестатическую модель Мира с положительной пространственной кривизной. Первая реакция Эйнштейна на это решение была резко отрицательной. В «Замечании к работе А. Фридмана «О кривизне пространства» Эйнштейн пишет:

*«Результаты относительно нестационарного мира, содержащиеся в упомянутой работе, представляются мне подозрительными»*

И лишь в следующем году в заметке «К работе А. Фридмана «О кривизне пространства» Эйнштейн признаёт, что решение Фридмана действительно удовлетворяет уравнениям поля и теоретически возможно. При этом Эйнштейн не касается вопроса – соответствует ли модель Фридмана реальности или нет. Он лишь отмечает, что уравнения поля допускают такие решения, оставляя в стороне вопрос об их физической реальности:

*«Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т.е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства».*

После этого в течение ВОСЬМИ лет Эйнштейн не касается проблем космологии. Он занят созданием единой теории поля и в своих работах нигде не обсуждает структуру пространства реального Мира. Лишь в 1931 году после появления исследований Хаббла, Эйнштейн пишет статью «К космологической проблеме общей теории относительности», в которой отказывается от статической модели.

#### **А. Эйнштейн (1931). «К космологической проблеме общей теории относительности».**

Эйнштейн приводит уравнения Фридмана, описывающие изменение радиуса пространственной кривизны  $P$  со временем для пространства положительной кривизны при нулевом давлении материи:

$$\left(\frac{P'}{P}\right)^2 + \frac{2P''}{P} = \lambda - \frac{c^2}{P^2} \quad (2E)$$

$$\left(\frac{P'}{P}\right)^2 = \frac{\lambda}{3} - \frac{c^2}{P^2} + \frac{\chi\rho c^2}{3} \quad (3E)$$

*«Моё решение [статическое решение Эйнштейна – Г.] получается из этих уравнений [уравнений Фридмана – Г.], если считать, что величина  $P$  [радиус пространственной кривизны – Г.] постоянна во времени. Однако с помощью этих уравнений можно показать, что это решение неустойчиво, т.е. что всякое решение, в некоторый момент времени мало отличающееся от такого статического решения, с течением времени будет всё больше*

отклоняться от него. **Уже по одной этой причине**, даже не говоря о результатах наблюдений Хаббла, я не считаю больше возможным приписывать физический смысл своему прежнему решению».

Из уравнений (2E) – (3E) при  $P = Const$  следует:

$$\lambda = \frac{c^2}{P^2} \quad \rho = \frac{2}{\chi P^2} - \text{решение Эйнштейна.}$$

Заметим, что в этом решении параметр Хаббла равен нулю:

$$H = \frac{P'}{P} = 0; \quad P' = 0 \quad (4E)$$

Поэтому уравнение (5) выполняется при произвольных конечных значениях плотности и давления:

$$\rho' = 0 \quad (5E)$$

Учитывая (3.2) и постоянство  $\lambda$ -члена  $\lambda = \frac{c^2}{P^2}$ , находим:

$$\rho'_m = 0 \quad (6E)$$

Константа  $\lambda$  в решении Эйнштейна выполняет роль эффективного отрицательного давления. Формулы (3.1) – (3.2) дают для «вакуума» уравнение состояния:

$$\rho_V + \frac{p_V}{c^2} = 0 \quad (116)$$

Давление в модели Эйнштейна связано с плотностью соотношением:

$$p = -\frac{\rho c^2}{2} = -\frac{c^4}{8\pi G P^2} = -\frac{c^4 \lambda}{8\pi G} = p_V \quad (117)$$

Хотя  $p + \rho c^2 \neq 0$ , выполняется  $\rho' = 0$ , поскольку  $H = \frac{P'}{P} = 0$ .

$$\text{Введём обозначения: } P_0^2 = \frac{c^2}{\lambda}; \quad \rho_0 = \frac{2}{\chi P_0^2} = \frac{2\lambda}{\chi c^2}. \quad (7E)$$

После несложных преобразований из уравнений (2E)-(3E) следует:

$$\frac{2P''}{P} = -\frac{c^2 \chi}{3} (\rho - \rho_0) \quad (8E)$$

Если интерпретировать изменение масштабного фактора как изменение радиуса пространственной кривизны (а значит, изменение объёма искривленного пространства), то из уравнения (8E) следует неустойчивость статической модели Эйнштейна. Действительно, при такой интерпретации рост  $P$  означает «расширение пространства» и ведёт к уменьшению  $\rho$  - правая часть (8E) становится положительной, что ведёт к положительному «ускорению»  $P''$  и дальнейшему уменьшению  $\rho$ . При выведении Вселенной из состояния равновесия (7E), Вселенная не возвращается в своё положение равновесия, а всё больше отклоняется от него. Следовательно, данная интерпретация уравнений Фридмана неизбежно ведёт к выводу о неустойчивости статической модели, а значит к её физической несостоятельности.

Однако такая интерпретация уравнений Фридмана вовсе не является единственно возможной. В нашей статье мы доказываем, что изменение масштабного фактора  $P$  можно интерпретировать иначе – связывать его с изменением «хода мирового времени», «скорости его течения». В этом случае наш анализ (формула (113) Дополнения-I) показывает, что статическое решение устойчиво.

Ещё один аргумент против принятия статической модели в стандартной интерпретации уравнений Фридмана состоит в том, что такая модель не объясняет эффект красного смещения Хаббла. Однако в новой интерпретации этот эффект может быть объяснён без гипотезы «расширения пространства» (в рамках статической модели) - как проявление разной скорости течения времени в разные эпохи развития Вселенной. Неодинаковость «скорости течения времени» в разные моменты развития Вселенной приводит к эффекту красного смещения в спектрах галактик, аналогично тому, как «замедление времени» вблизи массивных тел приводит к эффекту красного гравитационного смещения спектральных линий. Для объяснения «красного смещения Хаббла» поэтому вовсе не требуется считать пространство «расширяющимся», а галактики «разбегающимися». Смещение Хаббла вполне объяснимо и в рамках статической модели Вселенной, если ввести в рассмотрение неодинаковость скорости течения времени в разные моменты истории Вселенной.

Эйнштейн, будучи убеждённым сторонником принципа Маха, считал физически неприемлемой теорию, в которой принцип инерции зависит от свойств некоторого абсолютного пространства. Это было одним из главных аргументов при выборе им модели замкнутого статического пространства. Эйнштейн был приверженцем статической модели до тех пор, пока это было возможно<sup>6</sup>. Однако результаты Хаббла и неустойчивость предложенного Эйнштейном статического решения, в конце концов, заставили его принять нестатическую модель расширяющейся Вселенной.

### ДОПОЛНЕНИЕ-III. Связь с решением де Ситтера.

Формально приведённые выше решения, если зафиксировать входящие в них константы, совпадают с решениями для пространства де Ситтера. Отличие наших решений состоит в том, что, во-первых, константы интегрирования, входящие в решение, зависят от параметра «текущего момента времени»  $t_0$  и соответственно при каждом новом значении  $t_0$  получается решение с другими, новыми значениями констант интегрирования. Во-вторых, изменение масштабного фактора связывается с изменением «скорости течения» физического времени, а не с «расширением» пространства.

Покажем для случая пространства положительной кривизны, что найденное нами решение совпадает с решением де Ситтера, если не учитывать зависимость констант интегрирования от параметра  $t_0$ .

Решение де Ситтера соответствует пустому пространству без материи. Поскольку для космологического вакуума, описываемого  $\lambda$  – членом, выполняется уравнение состояния (116) и учитывая (3.1) – (3.2), проще всего получить решение де Ситтера, записав уравнения Фридмана в виде:

$$H^2 + \frac{c^2}{a^2} = A \quad (118)$$

$$\dot{H} + H^2 = A \quad (119)$$

$$H = \frac{a'}{a} \quad (120)$$

$$A = \frac{8\pi G\rho_V}{3} \quad (121)$$

<sup>6</sup> Jung (2005) приводит интересный факт: на Сольвеевском Конгрессе 1927 года в Брюсселе Эйнштейн в кулуарной беседе с Леметром – одним из авторов модели «расширяющейся Вселенной» - сказал, что по его мнению, нестатические модели Мира «просто отвратительны» (“simply disgusting”).

Общее решение этой системы имеет вид:

$$a = \frac{C_1 p^2 + C_2}{\sqrt{A} \cdot p} \quad (122)$$

$$p = e^{\sqrt{A}t} \quad (123)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные константы, определяемые из начальных условий.

Приведём доказательство, что (122)-(123) – это решение системы (118) – (119).

Используем соотношения:

$$p' = \sqrt{A} \cdot p \quad (124)$$

$$a' = \frac{C_1 p^2 - C_2}{p} \quad (125)$$

$$H = \sqrt{A} \cdot \frac{C_1 p^2 - C_2}{C_1 p^2 + C_2} \quad (126)$$

$$H' = A \cdot \frac{4C_1 C_2 p^2}{(C_1 p^2 + C_2)^2} \quad (127)$$

Подставив (126) и (127) в (119), получаем тождество. Подстановка (126) в (118) также даёт тождество, если наложить условие:

$$4C_1 C_2 = c^2 \quad (128)$$

Учитывая (128), решение (122) можно записать через гиперболический косинус:

$$a(t) = \frac{c}{\sqrt{A}} \cdot \text{Cosh}(\sqrt{A} \cdot (t - t^*)) \quad (129)$$

$$t^* = \frac{\text{Ln}\left(\frac{c}{2C_1}\right)}{\sqrt{A}} \quad (130)$$

Приведённое нами выше решение (формула (74)) получается из (129), если положить:

$$C_1 = \frac{c}{2q_0} \cdot e^{-\sqrt{A}t_0} \equiv C_1(t_0) \quad (131)$$

$$t^* = t_0 + \frac{\text{Ln}(q_0)}{\sqrt{A}} \equiv t^*(t_0) \quad (132)$$

Из определения (66) следует, что момент  $t^*$  соответствует значению  $q = 1$ . Значение  $q = 1$  соответствует обращению в нуль параметра Хаббла и в этом смысле является выделенным моментом времени, с которого начинается развитие «правильной Вселенной» с положительными значениями параметра Хаббла. Отметим, что решение (129) симметрично относительно обращения времени, отсчитываемого, начиная с момента  $t^*$ . Вводя переменную  $\tau = t - t^*$  для времени эволюции «правильной Вселенной», наше решение можно записать в виде, симметричном относительно замены знака времени  $\tau \rightarrow -\tau$ :

$$a(\tau) = \frac{c}{\sqrt{A}} \cdot \text{Cosh}(\sqrt{A} \cdot \tau) \quad (133)$$

<sup>7</sup> Прямой подстановкой легко убедиться, что (133) является решением системы (118)-(120).

$$\tau = t - t^* = t - t_0 - \frac{\text{Ln}(q_0)}{\sqrt{A}} \quad (134)$$

Непосредственной проверкой (после подстановки (134) в формулу (133)) легко убедиться, что решение (133) тождественно совпадает с найденным нами выше решением (74).

**Таким образом, найденное нами решение при каждом фиксированном значении момента «текущего времени»  $t_0$ , относится к классу решений де Ситтера. При этом константы интегрирования выбраны так, что решение оказывается симметричным относительно замены знака времени, отсчитываемого по шкале  $t$ , начиная с того момента, когда параметр Хаббла обращается в нуль.**

Константы интегрирования зависят от значения параметра  $t_0$  «текущего момента времени», а значит, мы имеем непрерывное однопараметрическое семейство решений де Ситтера:  $a(t; t_0)$ .

Решение, записанное в форме (133), не содержит параметра  $t_0$ . Графически этому решению (пространству де Ситтера – обозначение  $dS_4$ ) соответствует внутренняя метрика четырёхмерного гиперболоида в пятимерном пространстве  $M^{4,1}$ . Но в нашей модели каждой точке этого гиперболоида соответствует прямая в плоскости  $(t; t_0)$ , определяемая уравнением (134) для каждого значения координаты  $\tau$ . То есть структура оказывается более сложной, чем простое риманово пространство. Формально её можно привести к виду пространства де Ситтера, но при этом существуют «скрытые» преобразования, сохраняющие инвариантным значение  $\tau$  в соответствии с формулой (134).

Решение де Ситтера в *статической форме* получается из уравнений (118) – (119), если положить:

$$A = \frac{8\pi G \rho_V}{3} = \frac{c^2}{a^2}; \quad H = 0 \quad (135)$$

Подставив в (119), получим:

$$H' > 0 \quad (136)$$

Таким образом, статическое решение  $H = 0$  (то есть  $a' = 0$ ) будет неустойчивым, как и для случая модели Эйнштейна.

**Причина неустойчивости статических моделей Эйнштейна и де Ситтера в том, что в них масштабный фактор, входящий в уравнения Фридмана, интерпретируется как показатель пространственной кривизны, а изменение этого фактора интерпретируется как «расширение» или «сжатие» пространственных расстояний между телами.**

Начальное условие в форме  $a'(0) = 0$  не сохраняется с течением времени в ходе эволюции, описываемой уравнениями Фридмана. Поэтому «статические модели», в которых изменение масштабного фактора  $a$  интерпретируется как «расширение» («сжатие») пространства, оказываются неустойчивыми.

В нашей модели пространственная кривизны фиксирована и равна  $a_0$ , а влияние масштабного фактора  $a(t)$  сказывается на скорости течения физического времени и не связано с каким-либо изменением свойств пространства. Более того, в нашем решении состояние с фиксированной пространственной кривизной устойчиво: при малых отклонениях средней

плотности от равновесного значения Вселенная возвращается к первоначальному состоянию равновесия.

Новая интерпретация модели Фридмана базируется на расширенной математической структуре – в ней каждому моменту текущего времени  $t_0$  соответствует своё (зависящее от параметра  $t_0$ ) пространство Римана. Математически такую структуру можно отнести к геометрии расслоённых римановых пространств – «кросс – геометрии». Свойства такой геометрической структуры рассмотрены в работах Дмитрия Евгеньевича Бурланкова (2006, 2006а, см. также homepage).

#### ДОПОЛНЕНИЕ-IV. Отрицательное давление.

Мы показали выше (формулы (99)-(113)), что статическое решение устойчиво, если рассматривать уравнения Фридмана в новой интерпретации, в рамках которой динамика масштабного фактора не влияет на свойства пространства, а влияет лишь на скорость течения физического времени, определяя его скорость хода в разные моменты истории развития Вселенной. Статичность пространства означает, что плотность Вселенной не меняется со временем. Для плотности мы имеем уравнение (5):

$$\dot{\rho} + 3H \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (5)$$

Из этого уравнения следует, что плотность может быть постоянной величиной в двух случаях:

- 1) когда параметр Хаббла равен нулю  $H = 0$ ,
- 2) когда выполняется уравнение состояния  $\rho + \frac{p}{c^2} = 0$ . (137)

Первый случай соответствует статической модели Эйнштейна, второй – статической модели де Ситтера. Наша модель отличается от модели де Ситтера тем, что в нашей модели (при каждом значении  $t_0$ ) уравнение (137) выполняется для средней плотности Вселенной, заполненной материей, тогда как в модели де Ситтера рассмотрен случай Вселенной без материи. В модели де Ситтера средняя плотность Вселенной равна плотности космологического вакуума, описываемого посредством введения  $\lambda$  – члена в уравнения Эйнштейна. В этом случае уравнение (137) сводится к уравнению (116):

$$\rho_V + \frac{p_V}{c^2} = 0 \quad (116)$$

В нашей модели уравнение состояния (137) распадается на две части – одну для космологического вакуума и вторую – для материи:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = \left( \rho_V + \frac{p_V}{c^2} \right) + \left( \rho_m + \frac{p_m}{c^2} \right) = 0 \quad (138)$$

Первая скобка справа в этой формуле обращается в нуль, согласно (116), вторая также обращается в нуль за счёт введения в рассмотрение отрицательного давления, связанного с гравитационной потенциальной энергией.

Идея учёта гравитационной потенциальной энергии в тензоре материи, высказывалась неоднократно. С начала 1990-ых этот подход развивает немецкий астрофизик Ernst Fisher (1992, 1993, 2007). Fisher (1993) (Фишер) вводит отрицательное «гравитационное» давление в статическую модель Эйнштейна. Уравнения Фридмана с учётом этого добавочного члена дают решение в виде осциллирующей функции и тем самым снимается проблема первичной

сингулярности. Однако Фишер придерживается традиционной интерпретации, связывая осцилляции масштабного фактора с изменением свойств пространства – его «расширением» и «сжатием».

Наш подход отличается тем, что мы с самого начала отказываемся от общепринятой интерпретации динамики масштабного фактора как «расширения» (или «сжатия») пространства. В новой интерпретации изменение масштабного фактора никак не связано с пространственными расстояниями и размерами, и сказывается лишь на скорости течения времени в разные эпохи развития Вселенной, приводя к эффекту красного смещения Хаббла в спектрах удалённых космических объектов. Второе отличие нашей модели от подхода Фишера состоит в том, что мы формально работаем в рамках модели де Ситтера (а не модели Эйнштейна), но с учётом того, что не только вакуум, но и материя вместе с присущей ей гравитационной потенциальной энергией, феноменологически описываемой как отрицательное давление, удовлетворяет уравнению состояния (138). Наконец, наша математическая схема шире, чем просто пространство Римана – мы имеем расслоённое риманово пространство, в котором «слоем» является обычное риманово пространство (при фиксированном значении текущего момента времени  $t_0$ ), а «базой» – одномерное пространство, фиксирующее «текущий момент времени»  $t_0$ . В рамках такого расширения традиционной схемы, удаётся построить устойчивую статическую модель, свободную от известных проблем моделей с «расширением пространства». Важно подчеркнуть также, что оценки для известных из наблюдений параметров Вселенной (средняя плотность, «диаметр» и «масса» Вселенной, параметр «замедления», параметр Хаббла), найденные из этой модели, находятся в хорошем согласии с измеренными значениями.

Естественный путь введения отрицательного давления – это учёт потенциальной гравитационной энергии. Это можно сделать, просто включив соответствующее выражение для отрицательного давления в тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна. Из первого начала термодинамики давление, вызванное гравитационными силами притяжения в замкнутой системе, можно определить в соответствии с формулами:

$$dU_g + p_g dV = 0 \quad (139)$$

$$p_g = -\frac{\partial U_g}{\partial V} \quad (140)$$

Здесь  $U_g = U_g(M; V)$  – полная гравитационная энергия Вселенной, зависящая от полной массы  $M$  и объёма  $V$ . Считая, что замкнутая Вселенная – это замкнутая физическая система, приходим к адиабатической зависимости в первом начале термодинамики (139). Чтобы получить давление, мы должны взять частную производную от полной потенциальной гравитационной энергии замкнутой Вселенной по её объёму – формула (140).

То есть формально ввести отрицательное давление можно, если учесть вызываемое гравитацией взаимное притяжение тел. Феноменологически это притяжение можно трактовать как наличие отрицательного давления, подобно тому, как притяжение атомов в растянутом кристалле создаёт внутри твёрдого тела отрицательное давление. Проблема состоит в вычислении гравитационной энергии замкнутой Вселенной. Результат расчёта будет зависеть от сделанных предположений относительно распределения плотности и выбора математической формулировки для потенциальной энергии элемента объёма.

В статье мы использовали предположение о постоянном пространственном распределении плотности, а в качестве потенциальной энергии элемента объёма взяли Ньютоново выражение в форме:

$$dU_g = -\frac{GM(R)dm(R)}{R} \quad (141)$$

Здесь  $M(R)$  - масса, сосредоточенная в «сферической области» с радиусом  $R$  и  $dm(R)$  - масса сферического слоя, расположенного на границе сферической области радиуса  $R$ . «Радиус» «сферической области» мы определили как «расстояние» (proper distance) от центра до границы области. Полная гравитационная энергия находится интегрированием по всем  $R$ . Полученный результат приведён в статье<sup>8</sup>:

$$U = -G \cdot 8\pi^3 \rho^2 a_0^5 \cdot \gamma = -\frac{2\gamma}{\pi} \cdot \frac{GM^2}{a_0} \quad (39P)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{Si(2\pi)}{4\pi} + \frac{Si(4\pi)}{8\pi} = 0.446518 \quad (40P)$$

Давление  $p_g$ , описывающее гравитационное притяжение, находим по формуле (140):

$$p_g = -\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial a_0}}{\frac{\partial V}{\partial a_0}} \Bigg|_{M=Const} = -\frac{\gamma}{3\pi^3} \cdot \frac{GM^2}{a_0^4} = -\frac{4\pi\gamma}{3} \cdot G\rho^2 a_0^2 \quad (44P)$$

Интересно сопоставить наш расчёт давления с расчётом, выполненным в работе Фишера (1993). Фишер вводит отрицательное давление непосредственно в тензор энергии-импульса в виде:

$$p_g = -C \cdot \frac{\rho}{a} \quad (142)$$

Здесь  $C$  - некоторая константа,  $a$  - радиус кривизны. Фишер рассматривает статическую модель Эйнштейна, в которой:

$$C = \frac{GM}{\pi} \quad (143)$$

Подставив в (142) и учитывая, что  $M = 2\pi^2 a^3 \rho$ , находим:

$$p_g = -C \cdot \frac{\rho}{a} = -2\pi \cdot G\rho^2 a^2 \quad (144)$$

Сравнивая (144) с нашей формулой (44P), видим, что наша оценка модуля гравитационного давления в  $\frac{3}{2\gamma} \approx 3.36$  раз меньше, чем в модели Фишера.

**Рассмотрим общий вид для потенциальной гравитационной энергии замкнутой Вселенной.** Из соображений размерности эта величина может быть записана в виде:

$$U_g = -C_U \cdot \frac{GM^2}{a} \quad (145)$$

<sup>8</sup> Буква «P» в нумерации формул указывает на номер формулы из статьи.

Здесь  $C_U$  - некоторая константа, значение которой зависит от сделанных предположений относительно функции пространственного распределения плотности во Вселенной,  $a$  - радиус положительной пространственной кривизны,  $M$  - масса Вселенной. Используя формулу (44P) и учитывая, что  $V = 2\pi^2 a^3$ , для «гравитационного давления» в общем случае получаем формулу:

$$p_g = -\frac{C_U}{6\pi^2} \cdot \frac{GM^2}{a^4} = -\frac{2C_U\pi^2}{3} \cdot G\rho^2 a^2 \quad (146)$$

Условие статичности  $\rho' = 0$  приводит к соотношению:

$$p_0 + p_g = -\rho c^2 \quad (147)$$

Здесь  $p_0$  - гидростатическое положительное давление, которое можно записать в виде:

$$p_0 = w \cdot \rho c^2; \quad w \geq 0 \quad (148)$$

Учитывая (146) – (148), находим для параметра  $x = \sqrt{\frac{A}{B}}$  следующее выражение:

$$x = \sqrt{\frac{4(1+w)}{C_U \cdot \pi}} \quad (149)$$

$$\text{Формула (47) статьи получается, если положить } C_U = \frac{2\gamma}{\pi}. \quad (150)$$

Формула (149) показывает, что чем меньше константа  $C_U$ , тем больше будет максимально допустимое нашей моделью красное смещение Хаббла  $z_{\max} = x - 1$ . В статье приведён расчёт константы  $C_U$ , основанный на законе Ньютона, в предположении равномерной плотности распределения. Для этого приближения мы получили оценку  $z_{\max} = 1.677$ , что, очевидно, недостаточно для объяснения фактически обнаруженных красных смещений ряда объектов, для которых измеренные красные смещения достигают значения 10.

Найденная нами оценка параметра  $C_U$  - формула (150) – позволяет с хорошей точностью аппроксимировать закон Хаббла на небольших расстояниях, но наш расчёт, по-видимому, требует дополнительных уточнений, чтобы объяснить существование объектов, красное смещение которых в несколько раз выше полученной нами оценки  $z_{\max}$ .

Возможное уточнение константы  $C_U$  может быть получено, если учесть наличие фрактальных свойств для пространственного распределения плотности Вселенной. Такой расчёт сделан в работе Fahr and Sokaliwska (2011) и приводит к следующему выражению для гравитационной потенциальной энергии (формула (41) статьи Fahr and Sokaliwska (2011)):

$$U_g = -\frac{(4\pi)^2 (3-\alpha)}{9(5-2\alpha)} G\bar{\rho}^2 l_m^5 \quad (151)$$

Этот результат получен авторами статьи в предположении, что пространство евклидово. Здесь  $l_m$  - максимальный радиус, а параметр  $\alpha$  является показателем степенного закона для плотности распределения:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left( \frac{l_0}{l} \right)^\alpha \quad (152)$$

При этом используется условие нормировки:

$$M(l_m) = \frac{4\pi}{3} \cdot l_m^3 \cdot \bar{\rho} = \int_0^{l_m} 4\pi l^2 \rho(l) \cdot dl \quad (153)$$

Оно приводит к выражению для  $\rho_0$  (формула (35) статьи Fahr and Sokaliwska (2011)):

$$\rho_0 = \bar{\rho} \cdot \frac{3-\alpha}{3} \cdot \left( \frac{l_m}{l_0} \right)^\alpha \quad (154)$$

Проведём аналогичный расчёт для пространства постоянной положительной кривизны. В этом случае, учитывая вид метрики (14), имеем:

$$\sqrt{-g_3} = a_0^3 \cdot \text{Sin}^2(\chi) \cdot \text{Sin}(\theta) \quad (155)$$

$$dV = \sqrt{-g_3} \cdot d\chi \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (156)$$

Масса объёма «шара» радиуса  $a_0\chi$ :

$$M(\chi) = \int_0^\chi \rho(\chi) \cdot a_0^3 \cdot \text{Sin}^2(\chi') \cdot \text{Sin}(\theta) \cdot d\chi' d\theta d\varphi = 4\pi a_0^3 \cdot \int_0^\chi \rho(\chi) \cdot \left( \frac{1-\text{Cos}(2\chi')}{2} \right) d\chi' \quad (157)$$

Функцию распределения плотности запишем в виде:

$$\rho = \rho_0 \cdot \left( \frac{\chi_0}{\chi} \right)^\alpha \quad (158)$$

Условие нормировки для искривленного пространства переписывается в виде:

$$M(\chi_m = \pi) = 2\pi^2 a_0^3 \cdot \bar{\rho} = 4\pi a_0^3 \cdot \int_0^\pi \rho_0 \cdot \left( \frac{\chi_0}{\chi} \right)^\alpha \cdot \left( \frac{1-\text{Cos}(2\chi)}{2} \right) d\chi \quad (159)$$

Введём обозначение:

$$I_\alpha(\chi) = \int_0^\chi \frac{1-\text{Cos}(2\chi')}{\chi'^\alpha} d\chi' \quad (159)$$

Тогда из (159) для константы  $\rho_0$  получим следующее выражение:

$$\rho_0 = \frac{\pi}{\chi_0^\alpha \cdot I_\alpha(\pi)} \cdot \bar{\rho} \quad (160)$$

Масса шара радиуса  $a_0\chi$  равна:

$$M(\chi) = M \cdot \frac{I_\alpha(\chi)}{I_\alpha(\pi)}, \quad M = 2\pi^2 a_0^3 \cdot \bar{\rho} \quad (161)$$

Масса сферического слоя толщины  $a_0 d\chi$  равна:

$$dm(\chi) = \frac{(2\pi^2 a_0^3)}{I_\alpha(\pi)} \cdot \bar{\rho} \cdot \frac{1 - \cos(2\chi)}{\chi^\alpha} \cdot d\chi \quad (162)$$

Подставляем (161) и (162) в формулу для гравитационной энергии в приближении Ньютона:

$$U_g = - \left( \frac{M}{I_\alpha(\pi)} \right)^2 \cdot \frac{G}{a_0} \cdot \int_0^\pi I_\alpha(\chi) \cdot \left( \frac{1 - \cos(2\chi)}{\chi^{\alpha+1}} \right) d\chi \quad (163)$$

Сравнивая с формулой (145), находим константу  $C_U$ :

$$C_U = \frac{\int_0^\pi I_\alpha(\chi) \cdot \left( \frac{1 - \cos(2\chi)}{\chi^{\alpha+1}} \right) d\chi}{I_\alpha^2(\pi)} \quad (164)$$

Численное интегрирование формулы (164) показывает, что  $C_U$  принимает наименьшее значение при  $\alpha = 0$ , то есть при равномерной плотности распределения. При этом константа  $C_U$  равна вычисленному раньше значению (150). Таким образом, учёт фрактальной структуры с использованием формулы (158) приводит при положительных значениях  $\alpha$  лишь к росту константы  $C_U$  и соответственно к уменьшению максимального красного смещения. Этот результат глубоко отличается от результата расчёта для евклидового пространства, выполненного в статье Fahr and Sokaliwska (2011) – формула (151). Для константы  $C_U$  в этом случае получается следующее выражение:

$$C_U = \frac{3 - \alpha}{5 - 2\alpha} \quad (165)$$

Константа  $C_U$  положительна при  $\alpha < 2.5$  и  $\alpha > 3$  и стремится к нулю, когда  $\alpha \rightarrow 3 +$ . При  $\alpha = 0$  получается известное выражение для гравитационной энергии однородного шара. Сравнение значений  $C_U$  при  $\alpha = 0$ , рассчитанных для евклидова и искривленного пространства, показывает, что у искривленного пространства  $C_U$  меньше примерно в два раза.

Разобьем полную плотность на две части – плотность вакуума и плотность материи.

$$\rho = \rho_v + \rho_m \quad (166)$$

Давление материи складывается из положительного гидростатического давления и отрицательного гравитационного давления. Пусть:

$$\rho_m = s \cdot \rho, \quad 0 < s \leq 1 \quad (167)$$

Возьмём формулу для полного давления из нашей статьи – формула (46P):

$$p = \rho c^2 \cdot \bar{w} - \frac{4\pi}{3} \cdot G \rho^2 a_0^2 \cdot \gamma = -\rho c^2 \quad (46P)$$

Мы видим, что в левой части стоит полная плотность, как если бы вакуум был обычной весомой материей, что, очевидно, не так. Сделаем необходимые уточнения, выделив вклады

материи и вакуума в полное давление. Давление и плотность вакуума связаны уравнением состояния:

$$p_V = -\rho_V c^2 \quad (168)$$

Левая часть (46P) описывает давление материи в виде суммы гидростатической и гравитационной составляющих:

$$p_m = \underbrace{\rho_m c^2 \cdot \bar{w}}_{\text{гидростатическое давление}} - \underbrace{\frac{4\pi}{3} \cdot G \rho_m^2 a_0^2 \cdot \gamma}_{\text{"гравитационное" давление}} \quad (169)$$

Условие  $p = p_m + p_V = -\rho c^2$ , с учётом (166)-(169), приводит тогда к соотношению:

$$\rho_m c^2 \cdot \bar{w} - \frac{4\pi}{3} \cdot G \rho_m^2 a_0^2 \cdot \gamma = -\rho_m c^2 \quad (170)$$

$$\text{Отсюда вытекает выражение для величины } x \equiv \sqrt{\frac{8\pi G \rho a_0^2}{3c^2}} \quad (180)$$

$$x = \sqrt{\frac{2(1+w)}{s\gamma}} = \sqrt{\frac{4(1+w)}{s \cdot \pi \cdot C_U}} \quad (181)$$

$$\text{В статье было получено значение } \gamma = \frac{1}{2} - \frac{Si(2\pi)}{4\pi} + \frac{Si(4\pi)}{8\pi} = 0.446518 \quad (40P)$$

Это – приближённое значение.

**Сделаем необходимые уточнения в расчёте гравитационной потенциальной энергии материи.**

1. Необходимо учесть то обстоятельство, что в «правильной» Вселенной максимальное расстояние (формула (88)) равно:

$$L_{\max} = a_0 \left( \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{Arctg}(q_0) \right) = a_0 \chi_{\max} \quad (182)$$

Поэтому при расчёте гравитационной энергии «правильной» Вселенной верхний предел интегрирования следует взять равным  $L_{\max}$ .

2. Формула для гравитационного потенциала, создаваемого радиально симметричным распределением материи, должна быть уточнена с учётом искривления пространства. Сила гравитационного притяжения в плоском евклидовом пространстве зависит от расстояния по обратно квадратичному закону. Это связано с увеличением площади сферической поверхности, которая увеличивается пропорционально квадрату расстояния. В искривленном пространстве радиальное расстояние равно  $a_0 \chi$ , тогда как «радиус»  $r$  сферической поверхности, задаваемой обычным выражением  $4\pi r^2$ , определяется формулой  $r = a_0 \operatorname{Sin}(\chi)$ . В плоском пространстве мы определяем потенциал, создаваемый некоторым источником, исходя из известного закона, связывающего потенциал и силу гравитации на единицу массы:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} = -\frac{4\pi\alpha}{S}; \quad \alpha > 0 \quad (183)$$

Здесь  $\alpha = GM$  и  $S$  - площадь сферической поверхности радиуса  $r$ .

Из (183) следует:

$$U(r) = \int \frac{\alpha}{r^2} dr = -\frac{\alpha}{r} \quad (184)$$

В искривленном пространстве мы можем пользоваться формулой (183) в виде обратной зависимости силы притяжения от площади сферы  $S$ . При расчёте гравитационного потенциала мы должны интегрировать по «радиальному расстоянию»  $a_0\chi$ . С учётом этого гравитационный потенциал в искривленном пространстве можно определить следующим образом:

$$U(\chi) = \int \frac{4\pi\alpha}{S} d(a_0\chi) = \int \frac{4\pi\alpha a_0}{4\pi(a_0\sin^2(\chi))} d\chi = -\frac{\alpha}{a_0} \text{Ctg}(\chi) \quad (185)$$

Гравитационная энергия массы  $dm$  в поле  $U(\chi)$  равна:

$$dU = dm \cdot U(\chi) \quad (186)$$

Приходим к следующему выражению для гравитационной энергии радиально симметричного распределения масс в искривленном пространстве:

$$U = -\frac{G}{a_0} \int_0^{L_{\max}} \text{Ctg}(\chi) M(\chi) \cdot dm(\chi) \quad (187)$$

Имеем следующие выражения:

$$dm = \rho dV = 4\pi\rho a_0^3 \sin^2(\chi) d\chi \quad (188)$$

$$M(\chi) = \int_0^\chi dm = 2\pi\rho a_0^3 \left( \chi - \frac{\sin(2\chi)}{2} \right) \quad (189)$$

Подставляя в (187), находим:

$$U = -8\pi^2 a_0^5 G \rho^2 \int_0^{\chi_{\max}} \sin^2(\chi) \cdot \text{Ctg}(\chi) \cdot \left( \chi - \frac{\sin(2\chi)}{2} \right) d\chi \quad (190)$$

$$\chi_{\max} = \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arctg}(q_0) = \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arctg}(x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad (191)$$

Введём обозначение:

$$I(x) = \int_0^{\chi_{\max}(x)} \sin^2(\chi) \cdot \text{Ctg}(\chi) \cdot \left( \chi - \frac{\sin(2\chi)}{2} \right) d\chi \quad (192)$$

Тогда формулу (190) можно представить в следующем виде:

$$U = -C_U \cdot \frac{GM^2}{a_0} = -\left( \frac{2I(x)}{\pi^2} \right) \cdot \frac{GM^2}{a_0} \quad (193)$$

$$C_U = \frac{2I(x)}{\pi^2} \quad (194)$$

Согласно (181), имеем соотношение:

$$x = \sqrt{\frac{4(1+w)}{s \cdot \pi \cdot C_U(x)}} \quad (195)$$

Это приводит к уравнению относительно  $x$ .

$$s\pi \cdot x^2 \cdot C_U(x) - 4(1+w) = 2 \cdot \left( \frac{sx^2 I(x)}{\pi} - 2(1+w) \right) = 0 \quad (196)$$

Решение этого уравнения при  $w=0$  и  $s=0.276$  (параметр  $s$  определяет долю весомой материи от полной массы Вселенной: доля тёмной материи составляет 23%, а доля обычной материи - 4,6% от полной массы Вселенной<sup>9</sup>) приводит к значению:

$$x = 11 \quad (197)$$

Таким образом, после сделанных уточнений максимальное красное смещение будет в нашей модели равно:

$$z_{\max} = x - 1 = 10 \quad (198)$$

Приведённый в нашей статье расчёт без учёта вышеперечисленных поправок давал максимальное значение  $z_{\max} = 1.677$ , что, очевидно, не согласуется с данными о красных смещениях наиболее удалённых астрономических объектов. При малых красных смещениях теоретические кривые  $z(L)$ , соответствующие разным значениям  $x$ , мало отличаются друг от друга. Расхождение теоретических кривых становится заметно лишь при больших красных смещениях.

К настоящему времени удалось обнаружить (Bouwens, R.J, et all. (2011)) лишь одну галактику UDFj-39546284, красное смещение которой достигает значения  $z=10$ . При таких больших красных смещениях галактики слабо видны и трудно выполнить измерения с необходимой точностью<sup>10</sup>.

Для построения теоретической диаграммы Хаббла необходимо ввести яркостное расстояние  $d_L$  до объекта наблюдения с данным красным смещением. В статье за «расстояние» в теоретической диаграмме Хаббла была взята длина пути, который проходит свет, измеренная в физическом времени  $d = c \cdot (t_0 - T)$ . Это лишь приближённое выражение яркостного расстояния, которое (при рассмотрении больших расстояний и красных смещений) требует уточнений.

#### Определение яркостного расстояния.

1. Рассмотрим некоторый удалённый источник. Наблюдаемая светимость  $L$  будет меньше собственной светимости  $L_0$  источника. Наблюдаемая светимость уменьшается в силу разной скорости течения времени в точке наблюдения и в точке расположения источника. Это можно записать так:

$$L = \frac{dE}{dT} = \frac{dE}{T' \cdot dt} = \frac{dE}{dt} \cdot \frac{1}{(1+z)} = \frac{L_0}{(1+z)} \quad (199)$$

2. Яркостное расстояние  $d_L$  связано с длиной пути светового сигнала  $d$ , согласно формуле:

$$\frac{L}{4\pi d^2} = \frac{L_0}{4\pi d_L^2} \quad (200)$$

$$d_L = \sqrt{1+z} \cdot d = \sqrt{1+z} \cdot c(t_0 - T) = \sqrt{\frac{2xq}{1+q^2}} \cdot 2a_0 \cdot (\text{Arctg}(q) - \text{Arctg}(q_0)) \quad (210)$$

<sup>9</sup> WMAP оценки: [http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni\\_matter.html](http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html)

<sup>10</sup> Для этого источника при других методах обработки данных была также получена оценка  $z \approx 12$ , однако недавно выполненный детальный анализ (Bouwens, R.J, et all. (2013)) показывает, что при  $z \approx 12$  возникает ряд противоречий с другими данными и поэтому данная оценка, скорее всего, завышена.

$$q_0 = x - \sqrt{x^2 - 1}; \quad (201)$$

В интерпретации «расширяющейся Вселенной» яркостное расстояние определяется как произведение «координатного расстояния» в сопутствующей системе на множитель  $1+z$ . Это определение выражает главную идею этой картины Мира, согласно которой все координатные «расстояния» растягиваются, вследствие роста масштабного фактора. Поэтому два тела (наблюдаемый объект и наблюдатель), связанные с определёнными точками в сопутствующей системе координат будут «удаляться» друг от друга с течением времени в силу роста масштабного фактора.

В новой интерпретации модели Фридмана рост масштабного фактора ведёт к изменению масштаба мирового времени, оставляя неизменными все расстояния. Формула (199) выражает собой эффект «красного смещения» Хаббла. Рассмотрим этот важный пункт более подробно.

Физическое время  $T$  локально однородно. Возьмём, например, 1 секунду физического времени. Рассмотрим монохроматический источник излучения световых волн. Пусть за 1 секунду однородного времени источник излучения испускает некоторое фиксированное число фотонов  $N$ . Если источник расположен вблизи наблюдателя, то частоту фотонов обозначим  $\omega_0$ . Излучаемая источником за время  $\Delta t = \Delta T(t_0)$  энергия будет равна:

$$\Delta E = N \cdot \hbar \omega_0 \cdot \Delta t = N \cdot \hbar \omega_0 \cdot \Delta T(t_0) \quad (202)$$

Пусть теперь источник расположен на каком-то расстоянии от наблюдателя. В этом случае по прежнему число излучаемых фотонов в единицу физического времени будет равно  $N$ , так как именно физическое время является истинным показателем длительности физических процессов. Но теперь интервалу того же самого однородного времени  $\Delta t$  соответствует некоторый другой интервал физического времени  $\Delta T(t)$ . Пусть  $\omega$  - частота сигнала от удалённого источника, измеряемая с помощью физического времени. Излучаемая за время  $\Delta T(t)$  энергия будет равна энергии, излучаемой за время  $\Delta t$  источником, расположенным вблизи наблюдателя:

$$\Delta E = N \cdot \hbar \omega \cdot \Delta T(t) = N \cdot \hbar \omega_0 \cdot \Delta t \quad (203)$$

Отсюда получаем:

$$\omega \cdot \Delta T(t) = \omega_0 \cdot \Delta T(t_0) = Const \quad (204)$$

Учтём равенство:

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta T(t_0)} = \frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = T' = 1+z \quad (205)$$

Получаем, учитывая (204)-(205), закон красного смещения:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1+z} \quad (206)$$

При выводе этого закона мы использовали два утверждения:

- (1) Энергия, излучаемая определённым источником за интервал  $\Delta t$  однородного времени не зависит от пространственного расположения этого источника (вблизи наблюдателя или вдали от него). Это естественное допущение, выражающее свойство однородности пространства.
- (2) Число фотонов, излучаемых определённым физическим источником за единицу физического времени, есть фиксированная величина. Это утверждение вытекает из определения физического времени как меры длительности физических процессов.

Из формулы (203) следует формула (199):

$$L = \frac{\Delta E}{\Delta T(t)} = N \cdot \hbar \omega = \frac{N \cdot \hbar \omega_0}{1+z} = \frac{\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right)}{1+z} = \frac{L_0}{1+z} \quad (207)$$

Таким образом, соотношение (199) – это другая форма записи закона красного смещения.

Рассмотрим теперь более подробно введённое выше определение яркостного расстояния (luminosity distance). Измерительные приборы (телескопы) регистрируют поток энергии на единицу площади в единицу времени:

$$F = \frac{L_0}{4\pi d_L^2} \quad (208)$$

Зная значение  $F$  и оценку светимости источника  $L_0$ , можно рассчитать яркостное расстояние (luminosity distance)  $d_L$ , используя соотношение (208). Предполагается, что светимость  $L_0$  не зависит от расстояния до источника – её определяют, используя какую-либо закономерность, например, «период изменения блеска – светимость» для цефеид. Фактор неоднородности времени при этом не учитывается – предполагается, что время однородно.

Если учесть фактор неоднородности физического времени, то поток энергии на единицу площади будет равен:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (209)$$

В этой формуле  $L$  - наблюдаемая светимость удалённого объекта,  $d$  - расстояние, которое проходит свет, испущенный наблюдаемым объектом. Расчёт «яркостного расстояния» осуществляется с использованием соотношения (208) при данном измеренном значении  $F$ . Приравнявая правые части (208) и (209), получаем:

$$\frac{L_0}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{L_0}{4\pi d^2 (1+z)} = \frac{L_0}{4\pi \cdot (\sqrt{1+z} \cdot d)^2} \quad (210)$$

Таким образом «яркостное расстояние», определяемое стандартным способом через соотношение (208), связано с расстоянием, которое проходит свет, испущенный наблюдаемым объектом, соотношением:

$$d_L = \sqrt{1+z} \cdot d = \sqrt{\frac{2xq}{1+q^2}} \cdot 2a_0 \cdot (\text{Arctg}(q) - \text{Arctg}(q_0)) \quad (211)$$

Красное смещение задаётся выражением:

$$z = \frac{2xq}{1+q^2} \quad (212)$$

В астрономии определение яркостного расстояния опирается на формулу (208). В космологии «расширяющегося пространства» вместо формулы (211) получают соотношения:

$$\frac{L_0}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{L_0}{4\pi d^2 (1+z)^2} = \frac{L_0}{4\pi \cdot ((1+z) \cdot d)^2} \quad (213)$$

$$d_L = (1+z) \cdot d \quad (214)$$

Фактор  $1+z$  появляется в формуле (213) дважды именно в силу выбора интерпретации «расширения пространства». Один из множителей  $1+z$  описывает уменьшение светимости за счёт красного смещения, второй множитель  $1+z$  связан с «расширением пространства», вследствие которого число фотонов на единицу телесного угла, приходящих в детектор за единицу времени будет меньше в  $1+z$  раз чем та же величина вблизи источника излучения. В

нашей интерпретации неоднородность физического времени создаёт эффект «красного смещения» приходящих фотонов, но при этом второй эффект отсутствует, так как пространство не расширяется. Поэтому вместо соотношения (214) в новой интерпретации получаем формулу (211).

Источник излучает фиксированное число фотонов за одинаковые интервалы однородного времени. Время в точке наблюдения источника идёт быстрее, чем оно шло в месте расположения источника в момент испускания фотонов, регистрируемых наблюдателем. По этой причине одному и тому же интервалу однородного времени  $\Delta t$  соответствуют два разных интервала физического времени  $\Delta T(A)$  в точке наблюдения «А» и  $\Delta T(B)$  в точке расположения источника «В». Имеет место неравенство  $\Delta T(B) > \Delta T(A)$ , которое означает, что один и тот же интервал однородного времени, измеренный наблюдателем, равен  $\Delta T(A) = \Delta t$  (в силу локальной однородности физического времени) и равен большей величине  $\Delta T(B) > \Delta t$  для интервала однородного времени  $\Delta t$ , который был в прошлом – в момент излучения фотонов, регистрируемых наблюдателем. Два интервала однородного времени одинаковы по величине, но один из них относится к моменту испускания фотонов, а другой к моменту регистрации этих фотонов спустя какое-то время. За время движения фотонов от источника до наблюдателя скорость течения физического времени возрастает и поэтому интервалу однородного времени момента излучения фотонов будет отвечать больший по величине интервал физического времени  $\Delta T(B)$ . За время движения светового сигнала скорость течения физического времени увеличивается и поэтому тому же самому отрезку однородного времени в момент регистрации сигнала будет отвечать больший по величине интервал физического времени  $\Delta T(B)$ , что вызвано «убеганием стрелок» физических часов. При этом число излучаемых за время  $\Delta t$  фотонов, а значит, и регистрируемых за то же время  $\Delta t$  фотонов будет одинаковым. Убегание часов не скажется на числе фотонов, приходящих к наблюдателю за время  $\Delta t$ , но оно скажется на периоде колебаний световой волны, который увеличится, так как этот период в момент прихода сигнала будет измеряться убежавшими вперёд (идущими более быстро) физическими часами. Рост периода колебаний световой волны приведёт к соответствующему увеличению длины световой волны – эффекту «красного смещения». Пусть  $\tau_0$  - период колебаний световой волны в момент излучения и  $\tau$  - период колебаний световой волны в момент её регистрации наблюдателем источника. Тогда в силу ускорения хода часов за время движения светового сигнала получаем:

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{\Delta T(B)}{\Delta T(A)} = \tau_0 \cdot \frac{\Delta T(B)}{\Delta t} = \tau_0 \cdot \frac{dT(B)}{dt} = \tau_0 \cdot (1+z) \quad (215)$$

$$\lambda = c \cdot \tau = (1+z) \cdot c \cdot \tau_0 = (1+z) \cdot \lambda_0 \quad (216)$$

В силу того, что число регистрируемых за время  $\Delta t$  фотонов будет равно числу испущенных за такое же время  $\Delta t$  фотонов в новой интерпретации множитель  $1+z$  возникает только один раз и «яркостное расстояние» определяется соотношением (211).

Отметим, что «яркостные расстояния», определяемые согласно соотношениям (210), предполагают аппроксимацию не искривленного пространства. Эта аппроксимация применяется в астрономии при расчёте «яркостных расстояний», а значит, её же следует использовать и в теоретических расчётах.

## ДОПОЛНЕНИЕ-V. Проверка теоретического «закона Хаббла» и космологические параметры.

Формулы (211) – (212) определяют в параметрическом виде теоретический закон Хаббла. Выше было получено значение  $x = 11$ . Параметр  $q_0 = x - \sqrt{x^2 - 1} \approx 0.045549$ .

Проверим нашу теоретическую зависимость, используя две серии данных:

- (1) Данные по суперновым типа Ia – приведены в работе Ries et al. (2006) – Table 6. Яркостные расстояния рассчитаны по формуле, приведённой на стр. 28 этой статьи:

$$d_L = 10^{\frac{\mu_0 - 25}{5}} \quad (213)$$

- (2) Данные по гамма всплескам – приведены в работе Liang and Zhang (2008) – Table 2. Расчёт яркостных расстояний выполняется по той же формуле (213).

В Таблице 1 Приложения приведены соответствующие результаты расчёта. Для расчёта по данным гамма всплесков мы использовали средние значения  $\mu$ , приведённые в последнем столбце Таблицы 2 в работе Liang and Zhang (2008). На Графиках 1 и 2 построена диаграмма Хаббла  $z(d_L)$  и проведена теоретическая кривая, рассчитанная с помощью формул (211)-(212).

**График 1.** Диаграмма Хаббла для суперновых типа Ia и теоретическая кривая.

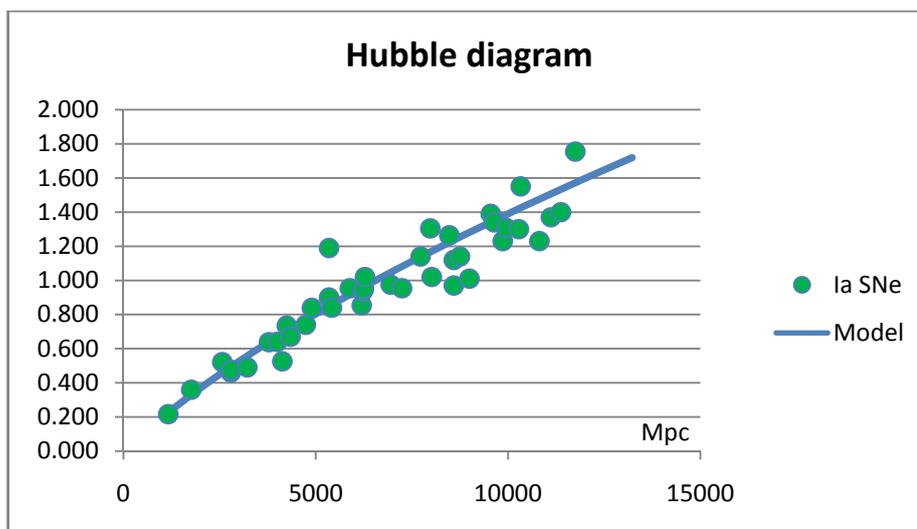


График 2. Диаграмма Хаббла для суперновых типа Ia и гамма всплесков и модель.

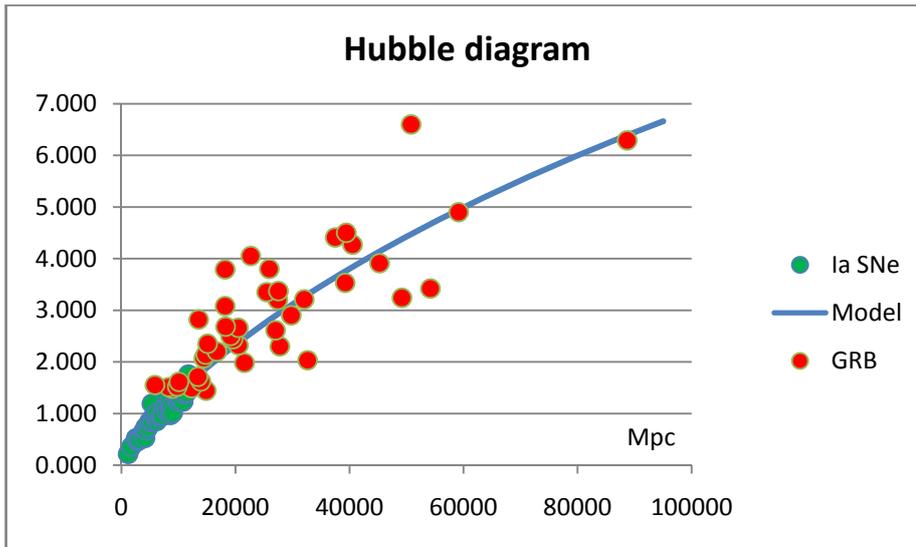
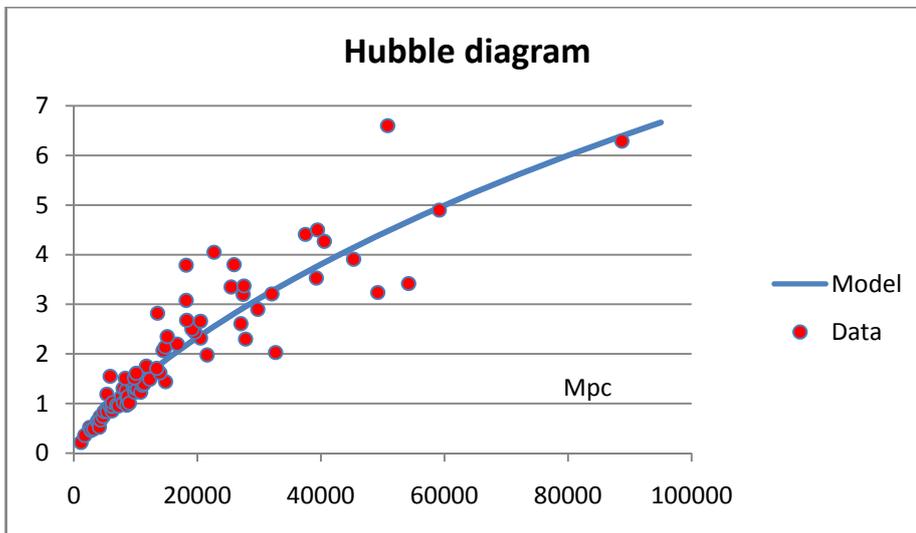


График 2. Диаграмма Хаббла для суперновых типа Ia и гамма всплесков.



Теоретическая кривая была рассчитана с использованием следующих значений параметров модели (в системе СИ):

$$x = 11$$

$$q_0 = 0.0455$$

$$A = 4.47 \cdot 10^{-36}$$

$$B = 3.7 \cdot 10^{-38}$$

$$a_0 = 1.56 \cdot 10^{27}$$

Теоретическая кривая проведена при значении параметра Хаббла  $H_0 = 65 \text{ km/c} \cdot \text{Mpc}$ .

В нашей модели максимальное красное смещение равно  $z_{\text{max}} = x - 1 = 10$ . Доля материи от полной плотности энергии составляет 0.276 (обычная материя и тёмная материя).

### Приведём значения некоторых физических параметров в нашей модели:

**Средняя плотность:**  $\rho = 8.004 \cdot 10^{-27}$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho : \rho_{crit} = 1.0083$ . Таким образом, наша Вселенная почти плоская.

WMAP-оценка:  $\rho = 9.9 \cdot 10^{-27}$  кг/м<sup>3</sup>

**Максимальный размер Вселенной:**  $D_{max} = \pi \cdot a_0 = 517.7$  Млрд. свет. лет.

**Максимальный размер видимой Вселенной (формула (90)):**

$$D_{max,observ.} = 502.7 \text{ Млрд. свет. лет.} = 154126.5 \text{ Мпс}$$

**Максимальный размер «правильной» видимой Вселенной (формула (88)):**

$$D_{max,observ.} = 243.8 \text{ Млрд. свет. лет.} = 74763.5 \text{ Мпс}$$

Согласно оценке Cornish, N.J. et al. (2004) диаметр Вселенной не менее 78 млрд. свет. лет.

**Время существования «правильной» Вселенной:**  $t_0 - t_1 = 46.28$  Млрд. лет.

Этот же отрезок времени по шкале физического времени:  $t_0 - T(t_1) = 307.2$  Млрд. лет.

**Параметр «замедления» (deceleration parameter):**  $Q_0 = -1.0083$

Оценка, которую приводят Riess, A.G. et al. (1998) (стр. 16 в репринте, размещённом в Архиве):

$$Q_0 = -1.0 \div 0.4$$

### ВЫВОДЫ.

Модель замкнутой Вселенной с фиксированным радиусом пространственной кривизны исключает проблемы первичной сингулярности, плоскостности и однородности, которые неизбежны в моделях с «расширением пространства». Эйнштейн долгое время был сторонником модели замкнутого статического Мира, видимо, интуитивно предугадывая к каким проблемам (puzzles) может привести нестатическая модель с «расширяющимся пространством». И не случайно Эйнштейн в 1927 году на Сольвеевском конгрессе в личных беседах с Леметром называл модели с «расширением пространства» «просто отвратительными» (“simply disgusting”) (см. Jung (2005)).

Все 1920-ые годы Эйнштейн вёл активную полемику с де Ситтером – автором второй статической модели. Преобразованием координат модель де Ситтера могла быть сведена к модели «с расширением пространства» и тем самым терялся смысл разграничения моделей на два класса. Эйнштейн не принимал моделей с «расширением пространства» до тех пор, пока не появилась работа Hubble (1929). Увеличение «красного смещения» с ростом расстояния было истолковано как эффект Доплера, вызванный «разбеганием галактик». Сам Хаббл с сомнением относился к такой слишком прямолинейной интерпретации своего закона, указывая, что, говоря о «скорости», он имел в виду «кажущуюся скорость» - какой бы она была, если бы допустимо было рассматривать данную зависимость как проявление эффекта Доплера. О сохранявшемся у него до конца жизни недоверии к интерпретации «расширения» свидетельствует множество мест в книгах, статьях и лекциях Хаббла (см., например, исторический обзор на эту тему в статье Vincent Sauve “Edwin Hubble... and myth that he discovered an expanding Universe”).

Отказ от статической модели был вынужденным шагом. Существенную роль здесь сыграла неустойчивость статических моделей Эйнштейна и де Ситтера. Было два пути: или вообще отказаться от статических моделей, или интерпретировать нестатические модели не как модели с

«расширением пространства», а как модели с неравномерно текущим (неоднородным) мировым временем.

Исторически был выбран первый путь. Этот выбор сразу породил множество проблем: проблема первичной сингулярности, проблема однородности Мира в больших масштабах и проблема плоскостности. Для их разрешения пришлось вводить новые гипотезы (гипотеза инфляции).

Выбор второго пути связан с расширением традиционной математической схемы – вместо одного риманова пространства необходимо в этом случае рассматривать однопараметрическое множество римановых пространств (расслоённое риманово пространство). Константы интегрирования уравнений Фридмана в новой интерпретации уже не являются раз и навсегда заданными постоянными, а зависят от параметра  $t_0$ , имеющего смысл «текущего момента» мирового времени. Хотя в новой интерпретации пространство не расширяется, наша модель относится к классу нестатических моделей, так как масштабный фактор меняется со временем. Но в отличие от стандартной интерпретации изменение масштабного фактора связывается не с радиусом пространственной кривизны пространства, а со скоростью течения времени. В стандартной интерпретации изменение масштабного фактора истолковывается как изменение масштаба, который описывает пространственные расстояния между двумя точками. В этой интерпретации увеличение масштабного фактора наглядно изображается как «растягивание» всех расстояний между точками с фиксированными координатами. В новой интерпретации масштабный фактор связывается с «растяжением» временных промежутков. Истинное (или физическое) время между двумя временными точками (по временной оси координат) увеличивается по мере роста масштабного фактора. Таким образом, в новой интерпретации мы по другому интерпретируем физический смысл масштабного фактора. Благодаря этому удаётся избежать всех тех затруднений, которые присущи стандартной интерпретации «расширяющегося пространства».

**Во-первых**, в новой интерпретации снимается проблема первичной сингулярности, поскольку пространство не расширяется и не сжимается. Даже в особой точке, где масштабный фактор принимает наименьшее значение, он не равен нулю.

**Во-вторых**, отпадает необходимость специально объяснять, почему Мир в больших масштабах однороден. В обычной интерпретации такая проблема есть следствие того, что в процессе расширения пространства, области пространства, в которых точки могут быть причинно связаны между собой (световыми сигналами), - такие области конечны и сигналы из одной такой области не могут влиять на физические процессы в других причинно-связанных областях. Непонятно, почему тогда наблюдения указывают на высокую однородность физических свойств самых разных и очень удалённых друг от друга областей пространства. В новой интерпретации эта проблема однородности отсутствует, так как в новой интерпретации пространство не расширяется, и радиус пространственной кривизны не меняется со временем.

**В-третьих**, в стандартной интерпретации существует проблема плоскостности, которая предполагает, что изначально параметры Вселенной должны были быть такими, чтобы Мир, в котором мы сейчас живём, оказался бы почти плоским. Причина такой очень тонкой настройки исходных параметров Вселенной до сих пор не ясна. В рамках новой интерпретации эта проблема опять-таки не возникает, так как никакого «расширения пространства» и связанного с ним уменьшения плотности не происходит.

**В-четвёртых**, в новой интерпретации уравнение (99) для плотности  $\rho$  описывает малые отклонения (в силу возможных флуктуаций) плотности  $\rho$  от равновесного значения  $\rho_0$ . В «правильной Вселенной» параметр Хаббла больше нуля, и данное уравнение указывает на

устойчивость состояния Вселенной с равновесной плотностью  $\rho_0$ . Поэтому состояние Мира с фиксированной плотностью внутри «правильной Вселенной» будет устойчивым состоянием: малые изменения в сторону увеличения (уменьшения) средней плотности будут нивелироваться процессами понижения (роста) плотности в направлении к равновесному значению  $\rho_0$ . Тем самым снимается одно из главных возражений против статических моделей Вселенной, связанное с неустойчивостью этих моделей. В новой интерпретации состояние с фиксированной средней плотностью является устойчивым состоянием Вселенной.

**В-пятых**, в новой интерпретации закон Хаббла выражает собой не «разбегание галактик», а изменение скорости течения мирового времени в разные эпохи развития Вселенной. Более замедленное течение времени в прошлом (сигналы из которого мы получаем в текущий момент) по сравнению с течением времени в настоящий момент и есть истинная причина «красного смещения» Хаббла. Чем более удалён от нас источник наблюдения, а значит, чем из более далёкого прошлого приходит к нам от него световой сигнал, тем больше различие в скорости хода времени прошлого по сравнению с настоящим и тем больше красное смещение в спектральных линиях этого удалённого источника. Эффект красного смещения Хаббла в точности аналогичен гравитационному «красному смещению», имеющему место, когда источник света расположен в области с сильным гравитационным полем, внутри которой имеет место замедление хода времени по сравнению с ходом времени внешнего наблюдателя источника. Приведённые выше Графики 1 – 3 наглядно доказывают, что эмпирические данные о красных смещениях можно объяснить в рамках новой интерпретации, не прибегая к идее о «расширении пространства».

Подытоживая сказанное, мы делаем вывод о предпочтительности выбора новой интерпретации, в которой изменение масштабного фактора связывается не с «расширением пространства», а со скоростью течения физического времени. «Недостатком» этого подхода (если это можно считать недостатком) является необходимость применения более сложного математического аппарата (геометрии расслоённых римановых пространств). Это приводит к возможности новых соотношений и закономерностей, которые не могут быть сформулированы в рамках стандартной математической схемы (римановой геометрии). Этот вопрос – вывод новых соотношений, существующих имплицитно в рамках новой математической схемы, пока почти не изучен, и заранее нельзя утверждать, что эти новые закономерности имеют физический смысл. Чтобы узнать, куда ведёт этот путь, нет иного способа кроме как пройти по нему до конца, но это долгий и трудный путь, который пока никем не был пройден.

**Таблицы.**

**Таблица 1.** Данные по сверхновым типа Ia: красные смещения – яркостные расстояния.

la SNe	z	mu0	DI (Mpc)
2002kc	0.216	40.33	1164.13
HST04Kur	0.359	41.23	1761.98
HST05Zwi	0.521	42.05	2570.40
HST04Yow	0.460	42.23	2792.54
2002dc	0.475	42.24	2805.43
HST04Hawk	0.490	42.54	3221.07
HST05Dic	0.638	42.89	3784.43
2003be	0.640	43.01	3999.45
2002hr	0.526	43.08	4130.48
2002kd	0.735	43.14	4246.20
2003bd	0.670	43.19	4345.10
HST04Rak	0.740	43.38	4742.42
HST05Spo	0.839	43.45	4897.79
2993eb	0.900	43.64	5345.64
HST05Red	1.190	43.64	5345.64
2003eq	0.840	43.67	5420.01
HST04Tha	0.954	43.85	5888.44
HST04Man	0.854	43.96	6194.41
2003XX	0.935	43.97	6223.00
2002dd	0.950	43.98	6251.73
HST05Fer	1.020	43.99	6280.58
HST04Omb	0.975	44.21	6950.24
2003es	0.954	44.30	7244.36
HST04Gre	1.140	44.44	7726.81
2002hp	1.305	44.51	7979.95
HST04Eag	1.020	44.52	8016.78
2993az	1.265	44.64	8472.27
HST04Pat	0.970	44.67	8590.14
HST05Gab	1.120	44.67	8590.14
2002ki	1.140	44.71	8749.84
HST05Str	1.010	44.77	8994.98
HST04Sas	1.390	44.90	9549.93
2003dy	1.340	44.92	9638.29
HST05Lan	1.230	44.97	9862.79
2003aj	1.307	44.99	9954.05
2002fw	1.300	45.06	10280.16
2003ak	1.551	45.07	10327.61
HST05Koe	1.230	45.17	10814.34
HST04Mcg	1.370	45.23	11117.32
2002fx	1.400	45.28	11376.27
1997ff	1.755	45.35	11748.98

**Таблица 2.** Данные по гамма всплескам: красные смещения – яркостные расстояния.

GRB	z	mu	DI (Mpc)
050318	1.44	45.86	14859.36
010222	1.48	44.75	8912.51
060418	1.49	45.45	12302.69
060502	1.51	44.60	8317.64
030328	1.52	44.96	9817.48
051111	1.55	43.85	5888.44
990123	1.61	45.02	10092.53
990510	1.62	45.72	13931.57
050802	1.71	45.64	13427.65
030226	1.98	46.67	21577.44
060108	2.03	47.57	32658.78
000926	2.07	45.80	14454.40
011211	2.14	45.85	14791.08
050922	2.20	46.12	16749.43
060124	2.30	47.22	27797.13
021004	2.32	46.56	20511.62
051109	2.35	45.90	15135.61
050406	2.44	46.46	19588.45
030115	2.50	46.41	19142.56
050820	2.61	47.16	27039.58
030429	2.66	46.56	20511.62
060604	2.68	46.31	18281.00
050603	2.82	45.66	13551.89
050401	2.90	47.37	29785.16
060607	3.08	46.30	18197.01
020124	3.20	47.19	27415.74
060526	3.21	47.53	32062.69
050319	3.24	48.46	49203.95
050908	3.35	47.03	25468.30
030323	3.37	47.20	27542.29
971214	3.42	48.67	54200.09
060115	3.53	47.97	39264.49
050502	3.79	46.30	18197.01
060605	3.80	47.07	25941.79
060210	3.91	48.28	45289.76
060206	4.05	46.78	22698.65
050505	4.27	48.04	40550.85
060223	4.41	47.87	37497.30
000131	4.50	47.98	39445.73
060510	4.90	48.86	59156.16
050904	6.29	49.74	88715.60
060116	6.60	48.53	50815.94

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Бурланков, Д. Е. (2006). «Время, пространство, тяготение». Москва, Ижевск, R&C Dynamics.  
[http://www.vixri.ru/d/Burlankov%20D.E.%20 Vremja,%20prostranstvo,%20tjagotenie.pdf](http://www.vixri.ru/d/Burlankov%20D.E.%20Vremja,%20prostranstvo,%20tjagotenie.pdf)
2. Бурланков, Д. Е. (2006 (?)). «Кросс геометрия».  
<http://www.nifti.unn.ru/burlankov/burlankov.files/pdf/CrossGeo.pdf>
3. Бурланков, Д. Е. Домашняя страница:  
[http://phys.unn.ru/staff\\_public.asp?id=185](http://phys.unn.ru/staff_public.asp?id=185)
4. Cornish, N.J. et al. (2004). Constraining the Topology of the Universe. Phys. Rev. Lett. 92, 201302  
ArXiv: [arXiv:astro-ph/0310233v1](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310233v1)
5. Fahr, H. J. and Heyl, M. (2007). About universes with scale-related total masses and their abolition of presently outstanding cosmological problems, *Astronomische Nachrichten* 328: 192.
6. Fahr, H. J. and Sokaliwska, M. (2011). Revised Concepts for Cosmic Vacuum Energy and Binding Energy: Innovative Cosmology. Chapter 5 in “Aspects of Today’s Cosmology”, ed. Antonio Alfonso-Faus. InTech: <http://www.intechopen.com/books/aspects-of-today-s-cosmology>
7. Bouwens, R.J, et all. (2011). A candidate redshift  $z \approx 10$  galaxy and rapid changes in the population at an age of 500 Myr. *Nature*, v. 469, pp. 504-507.
8. Bouwens, R.J, et all. (2013). Photometric constraints on the redshift of  $z \approx 10$  candidate UDFj-39546284 from deeper WFC3/IR+ACS+IRAC observations over the HUDF.  
ArXiv: <http://arxiv.org/pdf/1211.3105.pdf>
9. Hubble, E. (1929). "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". *PNAS* 15 (3): 168–173.
10. Jung, T. (2005). Three cosmological dogmas – Einstein influence on early relativistic cosmology. *Astron. Nachr./ AN326* (2005), No. 7 – Short contributions AG2005 Köln.  
<http://www.hs.uni-hamburg.de/DE/GNT/events/pdf/jung05.pdf>
11. Liang, N. and Zhang, S. N. (2008). Cosmology-Independent Distance Moduli of 42 Gamma-Ray Bursts between Redshift of 1.44 and 6.60.  
ArXiv: <http://arxiv.org/pdf/0808.2655v2.pdf>
12. Riess, A.G. et al. (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astronomical Journal* 116 1009; No.3.  
<http://iopscience.iop.org/1538-3881/116/3/1009/>  
ArXiv: [arXiv:astro-ph/9805201v1](http://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201v1)
13. Riess, A.G. et al. (2006). New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at  $z > 1$ : Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy.  
ArXiv: [arXiv:astro-ph/0611572v2](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611572v2)
14. Sauve, V. (?). Edwin Hubble... and myth that he discovered an expanding Universe.  
<https://sites.google.com/site/bigbangcosmythology/home/edwinhubble>
15. WMAP database: [http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni\\_matter.html](http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html)